

有限要素法による開領域電磁界計算

Open Boundary Electromagnetic Field
Calculation using Finite Element Method

斎藤 兆古, 高橋 和彦, 早野 誠治
Y.Saito, K.Takahashi and S.Hayano

法政大学工学部
College of Engineering, Hosei University

1. まえがき

電気・磁気装置を最適に設計するには、それらの電界や磁界分布を正確に算定することが必要である。電気・磁気装置では、多かれ少なかれ、開空間を持っている。たとえば、変圧器では、開空間が漏れリアクタンスを決定する大きな要素である。

電磁界分布を表わす偏微分方程式を解く一般的な数値解法として、有限要素法を上げることができる。しかし有限要素法は、通常閉領域問題を対象としている。このため、開領域問題に対する拡張として、減衰型無限要素法、外部有限要素法などがある[3]。しかしこれらの方法は、プログラミングの煩雑さ、計算時間等に問題がある。これらの事実に鑑み、本報告では、開領域問題を双対映像法によって閉領域問題に置き換えて、一般的な数値解法である有限要素法で解く方法を提案する。

2. 双対映像法

2-1 基礎理論

双対映像法は、電気映像法の拡張であり、双対な映像電荷を用いて開領域問題を閉領域問題に置き換える方法である。点電荷による電界問題を具体的な例として取り上げ、双対映像法の原理を説明する。

2-1-1 一次元問題

点電荷 $+q$ による電位分布は、 x 方向の一次元問題として考えると、図1(a)に示される。

図1(b)のようにソースの点電荷から $x=2L$ に $-q$ の映像電荷を置く。 $x=L$ を仮想境界とすれば、仮想境界上に0境界条件を作ることができる。このときの電位 V_z は次式となる。

$$V_z = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{(2L-x)} \right\} [V]. \quad (2.1)$$

(ϵ : 媒質の誘電率)

次に図1(c)のように $x=2L$ に、図1(b)の影像電荷 $-q$ に双対な $+q$ の影像電荷を置くと、 $x=L$ の仮想境界上に対称境界条件を作ることができる。このときの電位 V_a は次式となる。

$$V_a = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{(2L-x)} \right\} [V]. \quad (2.2)$$

(2.1), (2.2) 式を加えて(1/2)をかけると(2.3)式のように、双対な影像電荷は互いに打ち消し合い、このときの電位 V_a はソースの点電荷だけによる電位となる。

$$V_a = (1/2)[V_z + V_a] = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{x} \right) [V]. \quad (2.3)$$

このことは、ソースから $x=L$ の仮想境界上を0境界条件とした解と対称境界条件とした解をそれぞれ V_z , V_a として開領域問題を閉領域問題に置き換えて解くことが可能であることを表わす。これが双対影像法の原理である。

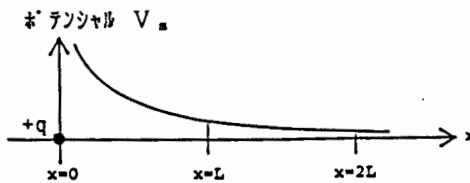


図1(a) 点電荷 $+q$ によるポテンシャル分布

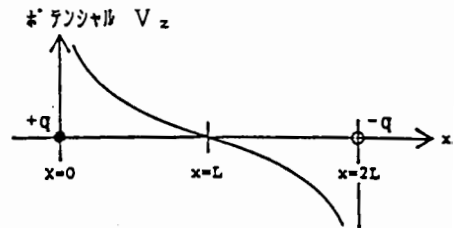


図1(b) $x=2L$ に $-q$ を置いたときのポテンシャル分布

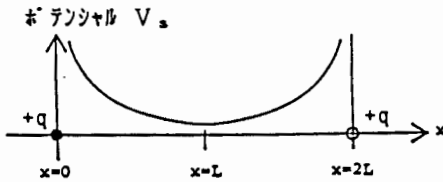


図1(c) $x=2L$ に $+q$ を置いたときのポテンシャル分布

2.1.2 二・三次元問題

双対影像法を一次元問題から二・三次元問題に拡張する。双対な影像電荷は、位置が等しく、値が双対でなくてはならない。この条件を満足するため、次のような双対影像電荷を考えることによって、双対影像法を二・三次元問題に適用することができる。ソースは正の点電荷である。

① 負の影像電荷による仮想境界の決定及びその境界条件

正の点電荷と負の影像電荷によって次のような仮想境界の形とその境界条件が得られる。

図2(a)において、点Pに+qの点電荷がある。点P'に-(a/d)qの影像電荷を置いたとき、点Oを中心とした半径aの球面上の任意の点Cにおいて、点Pの+qと、点P'の-(a/d)qによる電位 V_z を求めると、

$$V_z = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{d}{a} \cdot \frac{1}{r_2} \right) [V], \quad (2.4)$$

($r_1 = PC, r_2 = CP'$)

となる。

また図2(a)から

$$\frac{OC}{OP} = \frac{a}{\frac{a^2}{d}} = \frac{d}{a}, \quad \frac{OP'}{OC} = \frac{d}{a}, \quad (2.5)$$

となり、 $\triangle OPC$ と $\triangle OCP'$ は相似形となる。

従って

$$P'C : PC = r_1 : r_2 = d/a, \quad (2.6)$$

であり、この関係から(2.4)式のかっこ内が0となり球面上の任意の点Cの電位 V_z は0となる。

以上より、点Pに点電荷+qがあって、点Oから半径aの球面上を開領域の仮想境界とすれば、点P'に-(d/a)qの影像電荷を置くことで仮想境界の境界条件はDirichlet型の0境界条件となる。

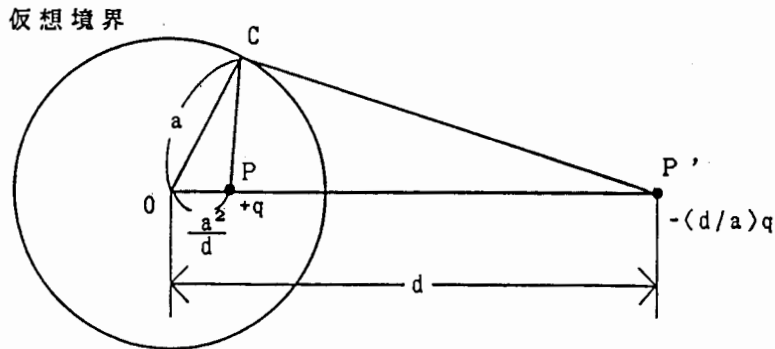


図2(a) 正の点電荷と負の影像電荷による仮想境界

② 正の影像電荷による仮想境界の決定及びその境界条件

負の影像電荷に対する双対なものは、正の影像電荷である。正の点電荷と正の影像電荷によって次のような仮想境界の形と境界条件が得られる。

図2(b)において、点Pに+qの点電荷がある。点P'に+(d/a)qの影像電荷

を置いたとき、点Oを中心とした半径aの球面上の任意の点Cにおいて、点Pの+qによる電位 V_0 は $PC = r_1$ とすると次式で表わすことができる。

$$V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon r_1} \quad [V]. \quad (2.7)$$

次にOCを半径方向に Δr だけ延長した点を C' とする。点 C' において、点 P' の $+(d/a)q$ による電位 V_1 は $P'C' = r_2$ とすると、

$$V_1 = \frac{(d/a)q}{4\pi\epsilon r_2} \quad [V], \quad (2.8)$$

であり、 $\angle COP'$ を θ とすると r_1, r_2 は、

$$r_1 = \sqrt{(a - K_1)^2 + (K_2)^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(d - K_3)^2 + (K_4)^2},$$

ただし

$$K_1 = \frac{a^2}{d} \cos \theta, \quad K_2 = \frac{a^2}{d} \sin \theta,$$

$$K_3 = (a + \Delta r) \cos \theta, \quad K_4 = (a + \Delta r) \sin \theta,$$

となる。これらを(2.7),(2.8)式へそれぞれ代入すると、

$$V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[1 / \sqrt{(a - K_1)^2 + (K_2)^2} \right] [V], \quad (2.7-a)$$

$$V_1 = \frac{(d/a)q}{4\pi\epsilon} \left[1 / \sqrt{(d - K_3)^2 + (K_4)^2} \right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[1 / \sqrt{(a - K_5)^2 + (K_6)^2} \right] [V], \quad (2.8-a)$$

となる。ただし

$$K_5 = \frac{a(a + \Delta r)}{d} \cos \theta, \quad K_6 = \frac{a(a + \Delta r)}{d} \sin \theta,$$

である。

次に、 $V_0 - V_1$ で $\Delta r \rightarrow 0$ とすれば、(2.7-a),(2.8-a)式より次式の関係が得られる。

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} (V_0 - V_1) = 0. \quad (2.9)$$

(2.9)式は、点 C' を点Cに近づけていくと、点Cにおいて、点Pによる電位 V_0 と点 P' による電位 V_1 が等しくなることを意味する。すなわち、点Cにおいて電位が対称となる。また(2.9)式は θ に無関係であることから、上記の関係は半径aの球面上の任意の点で成り立つ。

以上より、点Pに+qの点電荷があって、点Oから半径aの球面上を仮想境界とすれば、点 P' に $+(d/a)q$ の影像電荷を置くことにより、仮想境界はNeumann型の対称境界条件となる。

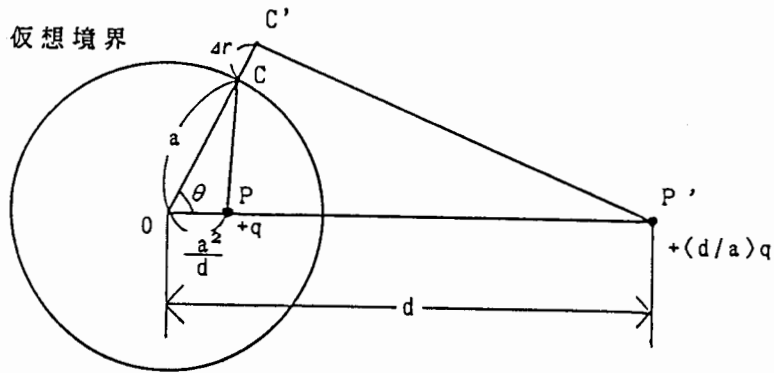


図2(b) 正の点電荷と正の映像電荷による仮想境界

①,②より三次元問題における双対映像法の仮想境界の形は、球形になる。
また、二次元問題において、仮想境界の形は円形になる。

2.2 計算の実行法

仮想境界が、対称境界条件の解ベクトルを X_1 、0境界条件の解ベクトルを X_2 とすると双対映像法の解ベクトル X は次式で表わされる。

$$X = (1/2) (X_1 + X_2) \quad (2.10)$$

ここで仮想境界上の解ベクトルは

$$X = (1/2) X_1 \quad (2.11)$$

である。なぜなら、仮想境界上では $X_2 = 0$ であるため。このことより(2.10)式の X_1 と X_2 をそれぞれ計算しなくても(2.11)式より1回の計算で次のように解ベクトル X を得ることができる。

仮想境界が対称境界条件のときの節点方程式を次のように表わすと

$$A \cdot X = Y, \quad (2.12)$$

(A:係数行列, X:解ベクトル, Y:入力ベクトル)

(2.12)式を仮想境界上の部分とそれ以外の部分に分けて表わすと,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

X_2 が仮想境界上の解ベクトルであり、 X_1 がそれ以外の解ベクトルである。
 (2.13)式より、次の関係を得る。

$$X_1 = A_{11}^{-1} (Y_1 - A_{12} X_2), \quad (2.14)$$

$$X_2 = A_{22}^{-1} (Y_2 - A_{21} X_1), \quad (2.15)$$

(2.14)式を(2.15)式へ代入して整理すると、

$$X_2 = (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} (Y_2 - A_{21} A_{11}^{-1} Y_1). \quad (2.16)$$

(2.11)式より、双対映像法の仮想境界上の解ベクトルは(2.16)式の半分の値であり、これを(2.14)式へ代入したものが双対映像法の仮想境界以外の解ベクトルとなる。すなわち、

$$X_1 = A_{11}^{-1} [Y_1 - A_{12} \{ (1/2) (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} (Y_2 - A_{21} A_{11}^{-1} Y_1) \}], \quad (2.17)$$

$$X_2 = (1/2) (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} (Y_2 - A_{21} A_{11}^{-1} Y_1). \quad (2.18)$$

一方、境界条件の法線方向を n とすると仮想境界上において、

$$\frac{\partial X}{\partial n} = \frac{1}{2} \frac{\partial X_z}{\partial n}, \quad (2.19)$$

が成立する。なぜなら境界上において $\partial X_n / \partial n = 0$ であるためである。よって $\partial X_z / \partial n$ を求めることによっても一回の計算で解くことが可能である。

3. 例題

3.1 ベクトルポテンシャル問題

開領域のベクトルポテンシャル問題の例題として、二次元問題の平行な四角柱導体対について、解析解と比較する。

図3.1(a)のような導体対において、仮想境界の半径を5[m]とする。計算対象領域は対称性より全体の1/4とする。数値解は、三角形一次要素を使用した有限要素法によるものである。また三角形は直角二等辺三角形である。さらに比較のため、仮想境界の境界条件を双対映像法と同じにして、その形が四角形と三角形の場合についてそれぞれ計算する。計算結果を図3.1(b)～(d)に示す。点線が数値解、実線が解析解による計算結果を表わす。

図3.1(b)～(d)より解の精度は、仮想境界の形が円形となる双対映像法が一番良い。

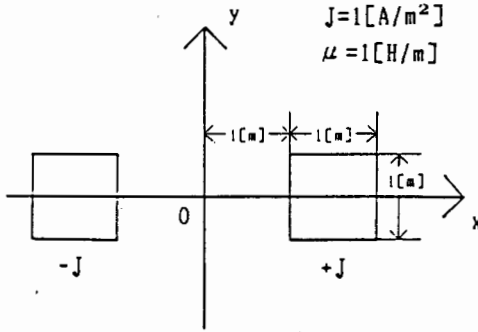
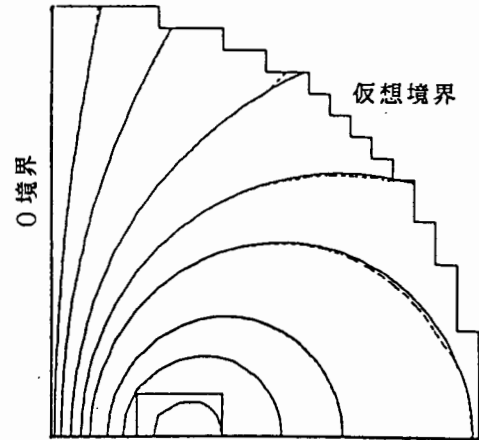
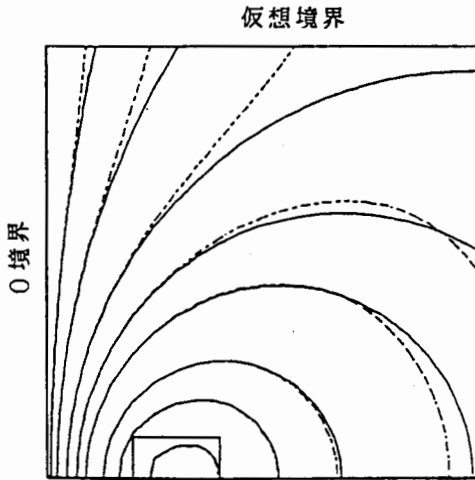


図3-1(a) 平行四角柱導体対



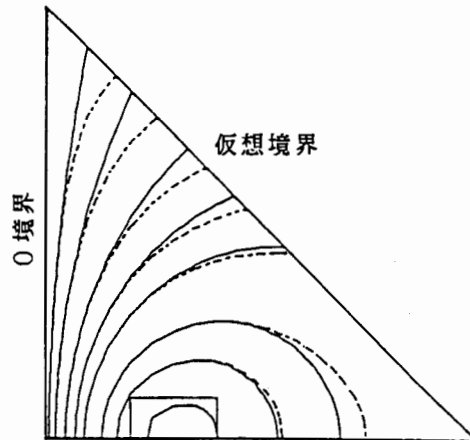
対称境界

図3-1(b) 双対映像法による
等ポテンシャル線図 (節点数340点)



対称境界

図3-1(c) 仮想境界が四角形の
ときの等ポテンシャル線図
(節点数420点)



対称境界

図3-1(d) 仮想境界が三角形の
ときの等ポテンシャル線図
(節点数210点)

次に、仮想境界の半径を2.5[m]に縮めた結果を図3-1(e)に示す。この場合の節点数は93点。図3-1(e)は、双対映像法の解の精度が、仮想境界の半径に依存しないことを示している。

仮想境界の半径が5[m]，導体の大きさを6×3[m]にしたときの計算結果を図3-1(f)に示す。この場合の節点数は340点。仮想境界が導体に接近しているが、解の精度は良い。

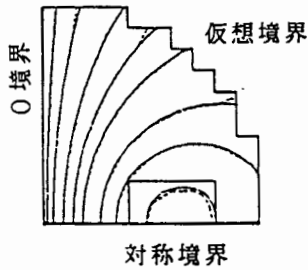


図3-1(e) 半径2.5[m]のときの
等ポテンシャル線図

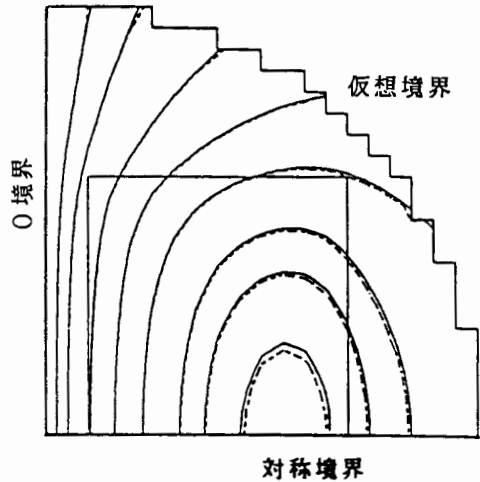


図3-1(f) 導体が6×3[m]のときの
等ポテンシャル線図

ベクトルポテンシャル問題の例題の最後に、図3-1(g)のような四角柱導体対が3対ある場合について計算した。計算結果を図3-1(h)に示す。このようなソースの配置に対しても、双対映像法は、良い計算結果を与える。

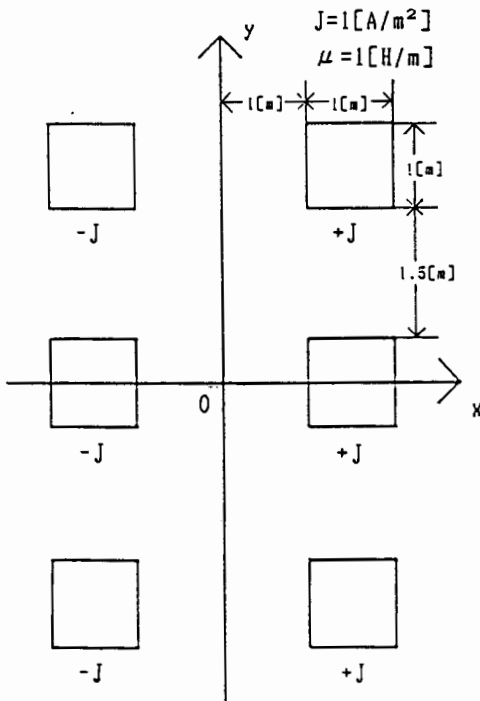


図3-1(g) 3対の平行四角柱導体対

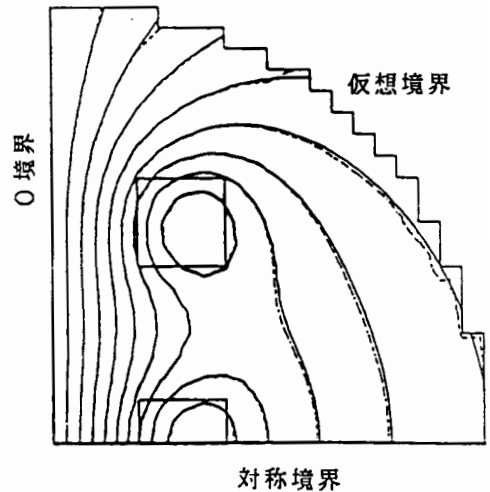


図3-1(h) 等ポテンシャル線図

3.2 スカラーポテンシャル問題

二次元問題の線電荷対を例題とする。スカラーポテンシャル問題もベクトルポテンシャル問題と同様な計算結果が得られた。よってここでは、図3.2(a)のような、 x 軸、 y 軸が 0 電位となる線電荷対の問題を計算する。計算結果を、図3.2(b)に示す。

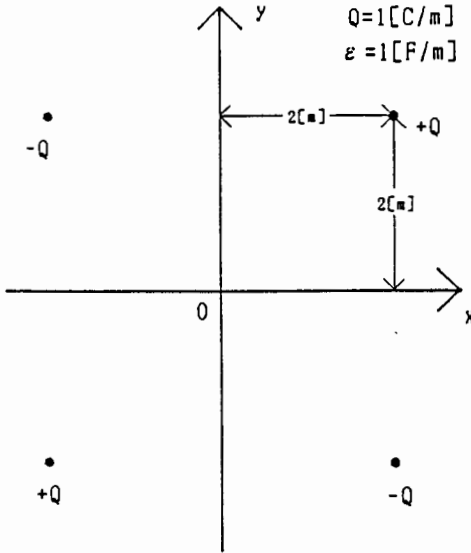


図3.2(a) 平行線電荷対

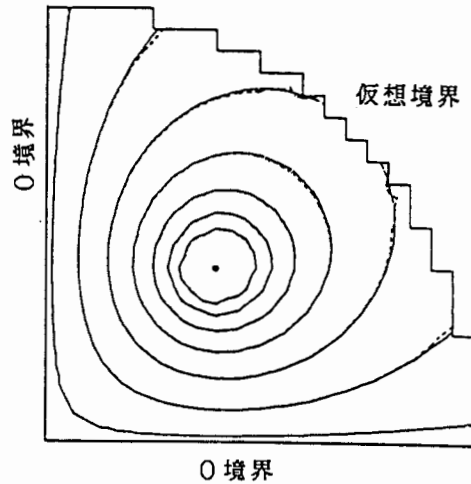


図3.2(b) 等ポテンシャル線図

4. 結論

本報告は、開領域問題に対する新しい解法として、電気映像法を拡張した双対映像法を提案した。この方法の最も大きな特長は、開領域問題の数値解法で開領域問題を解くことができる点である。双対映像法は、三次元を前提としていることから、三次元開領域問題に適用できることは明白である。

参 考 文 献

- [1] Y.Saito and et al, "Finite Element Solution of Open Boundary Magnetic Field Problems", IEEE Transaction on Magnetics, in printing September 1987.

- [2] 斎藤 他, "Voronoi-Delaunay 離散化法による電磁界計算
-その2 二次元開領域問題への適用-", 電気学会 回転機, 静止器
合同研究会資料, RM-86-52, SA-86-45, 1986.
- [3] 加川 幸雄, 有限/境界要素法, サイエンス社, 昭和58年.
- [4] M.Stafl, Electrodynamics of Electrical Machines, ILIFFE
Books Ltd., London, 1967.