

双対映像法による開領域電磁界計算

- 非線形問題への適用と応用例の提案 -

Strategic Dual Image Method for Open Boundary
Electromagnetic Field Calculation

- Nonlinear Saturable Magnetic Field Problem -

高橋 和彦, 早野 誠治, 斎藤 兆古.
K.Takahashi, S.Hayano, Y.Saito.

法政大学 工学部
College of Engineering, Hosei University

1. まえがき

筆者等は、有限要素法で開領域問題を算定する方法として、双対映像法を提案した。双対映像法は、field の発散方向成分と回転方向成分をそれぞれ求め、それらのfield を合成することで開領域のfield を得る方法である。その結果、開領域問題が有限要素法で極めて容易にかつ高精度に算定することが可能であることを報告した[1-4]。

双対映像法は、電気映像法を拡張した方法であるため、系の中に磁性体を含む問題に対しては、磁化の概念の導入により解くことが可能であることを示した[5, 6]。

本報告では、磁性体が磁気飽和を有する非線形の開領域問題に対しても、双対映像法が適用可能であることを示し、双対映像法の具体的な応用例として、磁気イメージセンサを提案するものである。

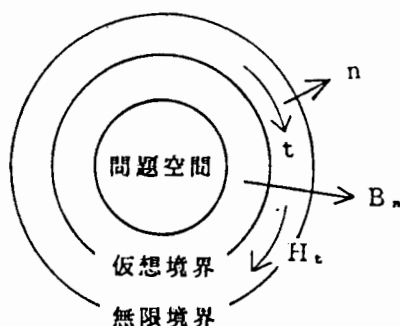
2. 双対映像法

2.1. 仮定

双対映像法は、以下に述べる仮定を必要とするが、どの仮定も一般的なものである。

(a) 磁界源の総和は、系全体として零である。

- (b) 対象とする系は、無限遠点に位置する無限境界によって囲まれている。
- (c) 無限境界における境界条件は、磁束密度の法線方向成分 (B_n) と磁界の強さの接線方向成分 (H_t) が零であるとする。
- (d) 実際の計算は、問題空間を取り囲む仮想境界を決定し、有限領域で行なうが、仮想境界上では B_n と H_t は独立に取り扱えるものとする。(第1図参照)



第1図 無限境界と仮想境界。

2. 2. 原理

- ① 閉領域の磁界は、発散方向成分 B_n と回転方向成分 H_t から成る。
- ② 電流とその影像を考えることにより、発散方向成分 B_n のみを満足する磁界を求める。
- ③ 磁荷とその影像を考えることにより、回転方向成分 H_t のみを満足する磁界を求める。
- ④ ②, ③で求めた磁界を組み合わせることによって①の閉領域の磁界を得ることができる。

以上が双対影像法の原理である。

2. 3. 仮想境界と境界条件

2. 3. 1 回転方向成分 H_t

第2図に示すように磁界源を電流とみなし、任意の電流 i_0 とその影像 $-(d_0/a)i_0$ を想定すると、中心を o とし半径 a とする円上において

クトルポテンシャルAは零となり，発散方向成分 $B_n = 0$ となる．他の電流に対しても，円の中心 o と半径 a が共通になるようにそれぞれの影像を想定すれば，半径 a の円上は $B_n = 0$ を満足する．従ってこの円を仮想境界とすれば仮想境界上は回転方向成分 H_t のみの磁界となる．これは，仮想境界の外側で想定した影像の総和が零になる条件

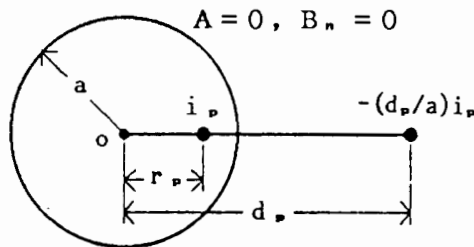
$$\sum_{p=1}^q (d_p / a) i_p = a \sum_{p=1}^q (i_p / r_p) = 0, \quad (1)$$

を満足する．（ q ：電流の数， r_p ： i_p から o までの距離）（1）式の条件は，仮想境界の中心 o でベクトルポテンシャルAが

$$A = 0, \quad (2)$$

となることを意味する．

以上，仮想境界上で， H_t のみの磁界を満足するベクトルポテンシャルAは仮想境界上とその中心において零境界条件で支配方程式を解くことにより得ることができる．



第2図 $B_n = 0$ の仮想境界．

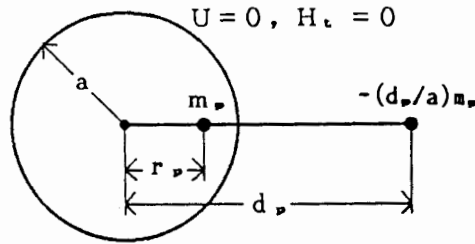
2.3.2 発散方向成分 B_n

次に磁界源を磁荷 m_p とみなし，その影像 $-(d_p/a)m_p$ を第3図のように想定すると，仮想境界上はスカラーポテンシャルUが零となり， $H_t = 0$ となる．従って仮想境界上は発散方向成分 B_n のみの磁界となる． $H_t = 0$ の条件をベクトルポテンシャルで表すと，

$$\partial A / \partial n = 0, \quad (3)$$

の対称境界条件になる．

以上，仮想境界上で B_n のみの磁界を満足するベクトルポテンシャルAは，（1）式を満足し，仮想境界上で対称境界条件及び，その中心 o で零境界条件で支配方程式を解くことにより得られる．



第3図 $H_t = 0$ の仮想境界.

2. 4 開領域の磁界

仮想境界上で、回転方向成分のみの磁界を満足するベクトルポテンシャルを A_z とし、発散方向成分のみの磁界を満足するベクトルポテンシャルを A_r とすると、開領域のベクトルポテンシャル A は

$$A = (1/2) (A_z + A_r), \quad (4)$$

で与えられる。(4) 式の $(1/2)$ は磁界源が重複するためである。

3. 計算の実行

3. 1. システム方程式

支配方程式を仮想境界内で有限要素法で離散化し、境界条件を仮想境界上とその中心で零としたシステム方程式を次式とする。

$$C_z X_z = F, \quad (5)$$

(C_z : 係数行列, X_z : 解ベクトル, F : 入力ベクトル)

境界条件を仮想境界の中心で零、仮想境界上で対称境界としたシステム方程式を次式とする。

$$C_r X_r = F, \quad (6)$$

(C_r : 係数行列, X_r : 解ベクトル)

双対映像法による開領域の解ベクトル X は(4) 式より、

$$X = (1/2) (X_z + X_r), \quad (7)$$

である。仮想境界上においては、 $X_z = 0$ であるから(7) 式は次式となる。

$$X = (1/2) X_0 \quad (8)$$

(6) 式を次式のように小行列に分解する。

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

X_1 : 仮想境界内部の解ベクトル

X_2 : 仮想境界上の解ベクトル

(9) 式から X_1 は次式となり、

$$X_1 = C_{11}^{-1} [F_1 - C_{12} X_2] \quad (10)$$

(8) 式の条件から X_2 は次式となる。

$$X_2 = (1/2) [C_{22} - C_{21} C_{11}^{-1} C_{12}]^{-1} [F_2 - C_{21} C_{11}^{-1} F_1] \quad (11)$$

(10), (11) 式から双対映像法の解ベクトル X は, (5), (6) 式の 2 個のシステム方程式の計算を必要とせず, 1 個のシステム方程式の計算で得ることができる。

3. 2. 磁性体を含む系

双対映像法は, 電気映像法を拡張した方法であるため, 系の中に磁性体が含まれた場合には従来の方法を直接適用できない。従ってこの場合においては磁性体の透磁率の代わりに磁化の概念を用いることで, 双対映像法が磁性体を含む開領域問題に適用することが可能となる。

3. 2. 1 支配方程式

磁性体において, 磁束密度 B と磁界 H および磁化 M の間に次の関係がある。

$$B = \mu_0 H + M, \quad (12)$$

(μ_0 : 真空中の透磁率)

(12) 式は, 透磁率 μ を用いて, 次式のように表わすこともできる。

$$B = \mu H. \quad (13)$$

(12) 式をベクトルポテンシャル A を用いて表し, $\text{div } A = 0$ を仮定すると次式の支配方程式を得ることができる。

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 A = -J_0 - J_1, \quad (14)$$

ここで、 J_0 は印加電流密度で、 J_1 は等価磁化電流密度であり、それぞれ次式で与えられる。

$$J_0 = \nabla \times H, \quad (15)$$

$$J_1 = \nabla \times \frac{1}{\mu_0} M. \quad (16)$$

同様に(13)式から次式の支配方程式を得ることができる。

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 A = -J_0. \quad (17)$$

(14)式から(17)式を引き算すると(16)式の J_1 は、

$$-J_1 = \frac{1}{\mu_0} \nabla^2 A - \frac{1}{\mu} \nabla^2 A, \quad (18)$$

として表わすことができる。

3. 2. 2 反復解法

(14)式を仮想境界内で有限要素法により離散化した場合、システム方程式の入力ベクトル F は、印加電流密度による入力ベクトル F_0 と等価磁化電流密度による入力ベクトル F_1 の和からなる。 F_0 は既知であるが F_1 は(18)式より次式で表すことができる。

$$F_1 = (C_0 - C_0') X. \quad (19)$$

ここで C_0' は、(17)式を支配方程式としたときの係数行列である。(19)式から F_1 は解ベクトルの関数であるため、解ベクトルは反復的に求めることができる。

磁性体が含まれた場合の解法の最大の特長は、磁性体が含まれた影響を係数行列の項ではなく、入力項に等価磁化電流の形で導入した点である。

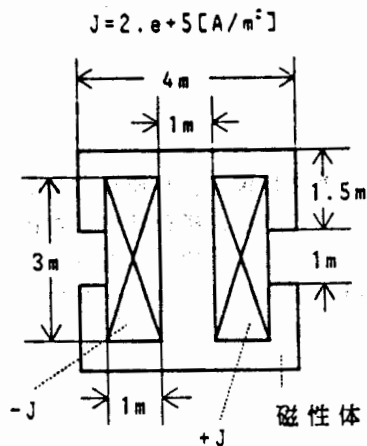
3. 2. 3 非線形問題への適用

磁性体が磁気飽和の非線形性を有する場合には、(19)式における C_0' が解の関数となるだけである。従って非線形問題においても、逆行列の計算は最初の1回だけで、後は代入計算のみとなる。また、この磁化の概念を用いた反復解法は、絶対安定な解法であることが報告されている[7]。

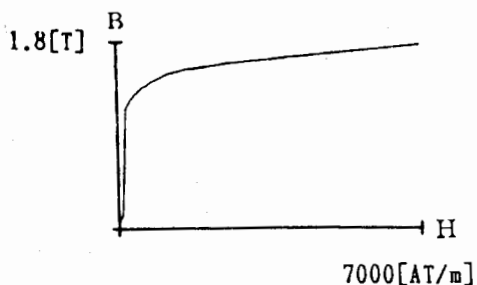
3. 2. 4 例題

磁性体が磁気飽和を有する非線形問題の例題として、E型マグネットを計算

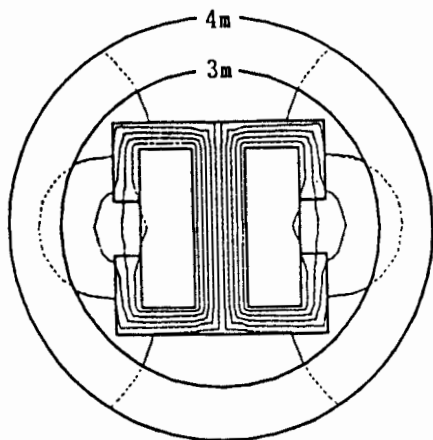
する。第4(a)図は、E型マグネットの形状を示し、計算に用いたB-H曲線を第4(b)図に示す。第4(c)図は、計算結果であるが、その妥当性を示すため仮想境界の半径を変えて計算した結果である。



(a) E型マグネット。



(b) B-H曲線。



(c) 計算結果。

第4図 非線形閉領域問題。

4. 双対映像法の具体的応用例

有限要素法は、すでに多くの電気・磁気装置の基本設計や実測できない部分のfield分布推定等など極めて広汎に使われている。しかし、実際の装置は、多かれ少なかれ閉領域を含むため、有限要素法を適用する場合、何らかの工夫が必要であった。

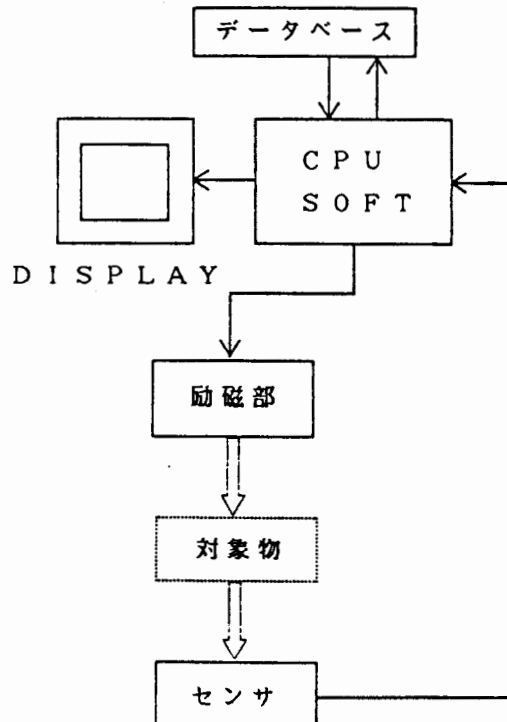
一方、双対映像法は、直接開領域問題に適用可能な方法であるため、有限要素法の適用分野をより拡大することができる。筆者等は、単に従来有限要素法が適用されていた問題に双対映像法を適用し、開領域部分を正確に考慮するよりも、むしろ開領域が極めて支配的な問題に双対映像法を適用するほうがその真価を発揮できると考え、従来の磁気探傷法を拡張した磁気イメージセンシングを提案する。

4. 1. 磁気イメージセンシング

磁気イメージセンシングとは、従来の磁気探傷技術が、磁性体の有無や磁性体中の欠損部などを探知するのに対し、磁性体の形状、磁化特性さらにその位置を正確に推定しようとするものである。たとえば、地球磁場分布の乱れを利用し、地下の鉱物資源や海中の潜水艦を探知する技術が従来の磁気探傷法であれば、それらの正確な位置だけでなく形状や材質等まで極めて高精度に推定する技術が磁気イメージセンシングと考えられる。その基本的原理は、レーダや超音波探傷法が波動の反射や屈折を利用するのに対し、磁性体の自発磁化や金属の渦電流による磁界を利用してセンシングする方法である。

4. 2. 基本的構成

現在、検討せんとしている磁気イメージセンサの基本的な構成は、地球磁場などの外部磁界を利用するパッシブ型でなく、励磁部分を有するアクティブ型であり、第5図に示すように、測定の指示や計算を行なうマイクロコンピュータ部分、励磁部、センサ、データベースおよび表示装置からなる。動作は、マイクロコンピュータから励磁部へ磁化指令を出し、対象物を通して得られる磁界分布をセンサで捕らえ、この測定されたデータをマイクロコンピュータに取り込み、実測データを再現する対象物を推定し、結果をディスプレイに表示する。実際の推定計算は、問題が逆問題でまた多くの場合非線形の媒質が前提となるため、実測データに最も近い過去のデータをデータベースから取り出し、



第5図 基本的構成。

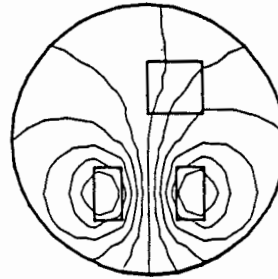
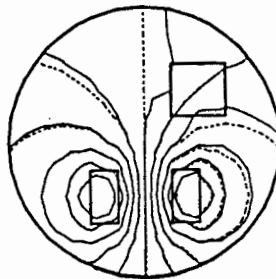
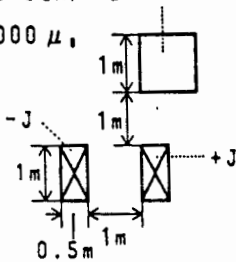
反復解法の初期推定値とする。また、推定が終了すると結果がデータベースに蓄えられるため、測定する毎に推定速度は向上する。すなわち、AI手法で計算速度の向上を図る。

4. 3. 基礎実験

実際に上述のような磁気イメージセンサが実現可能かどうかの基礎実験として、本報告では、正方形の磁性体の単一方向の位置推定についての数値実験を行なう。第6(a)図は、励磁コイルと磁性体の形状を示している。第6(b)図で点線は磁性体が存在しない場合の磁束分布を示し、実線は磁性体が存在する場合の磁束分布を示している。明らかに、両者に大きな違いがあるため、磁性体の存在の有無は極めて容易に推定できる。また仮想境界に沿って磁束分布が測定されたとすれば、磁性体が右方向か左方向かの推定も可能である。このことは、第6(c)~(f)図に示すように励磁コイルを左方向から右方向へ平行移動した場合の磁束分布の差異からより正確に推定できる。第6(b)~(f)図のデータ全体を統括して、形状や縦方向の位置などまでも正確に推定することが当面の目的であるが、本報告では、少なくとも横方向の位置推定については可能であることを示した。

$J=1. \times 10^6 [A/m^2]$ 磁性体

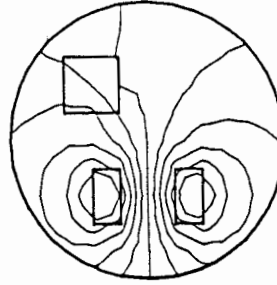
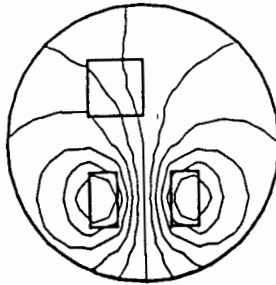
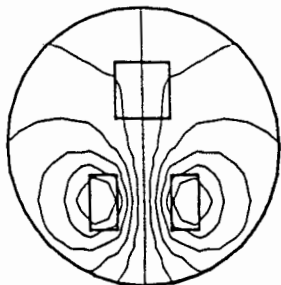
$\mu=1000 \mu_0$



(a) 励磁コイルと磁性体.

(b) 磁束分布.

(c) 磁束分布.



(d) 磁束分布.

(e) 磁束分布.

(f) 磁束分布.

第6図 磁気イメージセンサの基礎実験.

5. 結論

本報告では、双対映像法を磁気飽和を有する非線形開領域問題に適用可能なことを示した。また双対映像法の応用例として、磁気イメージセンサを提案し、簡単な数値実験を行ない、少なくとも位置推定は可能であることを示した。

参考文献

- [1] Y.Saito and et al, IEEE Trans., Mag., MAG-23, pp.3569 (1987).
- [2] Y.Saito and et al, Journal of Applied Physics, Vol.63, No.8, pp.3366 (1988).
- [3] 斎藤 他, 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-87-125.
- [4] 斎藤 他, 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-87-126.
- [5] Y.Saito and et al, to be presented at the 4th Joint MMM-Intermag Conference, Vancouver, Canada, 1988.
- [6] 斎藤 他, 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-88-100.
- [7] 斎藤 他, 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-88-98.