

# Voronoi-Delaunay 離散化法による電磁界計算

—Voronoi-Delaunay 相互変換—

Electromagnetic Fields Calculation using  
Voronoi-Delaunay Discretization

—Voronoi-Delaunay Transformation—

池口 修一, 早野 誠治, 斎藤 兆古  
S.Ikeguchi, S.Hayano, and Y.Saito

法政大学 工学部  
College of Engineering, Hosei University

## 1. まえがき

筆者等は、電気・磁気装置の電磁界を高速に且つ高精度に算定するVoronoi-Delaunay離散化法を提唱してきた[1,2]。このVoronoi-Delaunay離散化法は、電磁界をVoronoi系とDelaunay系で独立に解き、結果を組み合わせる方法である。さらに、Voronoi系又はDelaunay系のどちらか一方のシステム方程式を解けば、他方の解が得られるVoronoi-Delaunay相互変換をウェーブガイドの固有値問題に提案した。その結果、有限要素法より圧倒的に高速で高精度に固有値が求まることを報告した[3]。

本報告では、このVoronoi-Delaunay相互変換をポアソン・ラプラス問題に適用し、固有値問題だけでなく、電磁界分布算定のより高速化が可能であることを報告する。

## 2. Voronoi-Delaunay離散化法

### 2.1. 数学的モデル

$\phi$  をスカラー又はベクトルポテンシャルの  $z$  方向成分、 $\lambda$  を媒質のパラメータさらに  $\sigma$  を source density として、次式を支配方程式とする。

$$\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\sigma \quad . \quad (1)$$

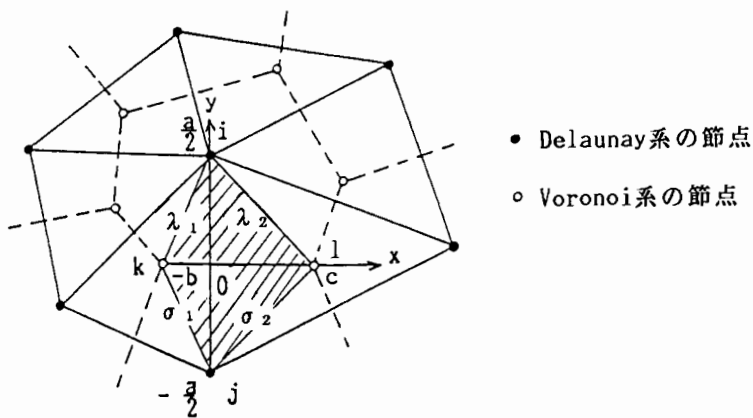
## 2. 2. Voronoi-Delaunay線図

第1図に示すように、空間に節点が与えられたとき、各節点に空間を割り振ると各節点を取り囲む多角形が形成される。この多角形をVoronoiの多角形という。Voronoiの多角形の各辺の垂線で各節点間を結ぶと三角形メッシュが形成される。この三角形をDelaunayの三角形という。このとき、Voronoiの多角形の辺はDelaunayの三角形の辺の垂直二等分線となり、またVoronoiの多角形の頂点はDelaunayの三角形の外心に位置する。逆に、Delaunayの三角形が形成されると、Delaunayの三角形の外心を結ぶことによってVoronoiの多角形が形成される。次に、Voronoiの多角形の二頂点とDelaunayの三角形の二頂点から成る四辺形を一要素として考えると、第1図中に示してあるように常に局所直交座標系が形成される。Voronoi-Delaunay線図におけるこの局所直交性を利用して、Voronoi系とDelaunay系を独立に定式化する方法がVoronoi-Delaunay離散化法である。Delaunay系又はVoronoi系のメッシュのどちらか一方が決定したとき、他方のメッシュが自動的に決定される幾何学的性質は、Delaunay系とVoronoi系は完全に独立でなく、Delaunay系の諸量とVoronoi系の諸量が密接に関係していることを意味している。

## 2. 3. 節点方程式

第1図の局所直交座標系において、y方向とx方向の試行関数は互いに独立となっているから、(1)式は、(2)式と(3)式のようにy成分とx成分に分離されると仮定する[1-3]。

$$\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{1}{2} \sigma \quad (2)$$



第1図 Voronoi-Delaunay線図と局所直交座標系。

$$\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} \sigma \quad (3)$$

(2)式に対するDelaunay系のFunctionalは、

$$F(\phi_p) = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b}^c \{ \lambda (\partial \phi_p / \partial y)^2 - \sigma \phi_p \} dx dy \quad (4)$$

で与えられる。また、Delaunay系の節点  $i, j$  間の試行関数は、

$$\phi_p = \frac{\phi_i + \phi_j}{2} + \frac{\phi_i - \phi_j}{a} y \quad (5)$$

となる。(4)式に(5)式を代入し極値を求めると、

$$\begin{aligned} \partial F(\phi_p) / \partial \phi_i &= \{ \lambda_1 (b/a) + \lambda_2 (c/a) \} (\phi_i - \phi_j) \\ &\quad - (a b \sigma_1 / 4 + a c \sigma_2 / 4) = 0 \quad (6) \end{aligned}$$

として、 $\phi_i$  に関する節点方程式を得る。

(3)式に対する Voronoi系のFunctionalは、

$$G(\phi_c) = - \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b}^c \{ 1/\lambda (\lambda \partial \phi_c / \partial y)^2 - \sigma \hat{\phi}_c \} dx dy \quad (7)$$

で与えられる。さらに、Voronoi系の節点  $k, l$  の試行関数は、

$$\phi_c = \frac{c \lambda_1 \phi_k + b \lambda_2 \phi_l + \lambda_2 (\phi_l - \phi_k)}{c \lambda_1 + b \lambda_2} x, \quad -b \leq x \leq 0 \quad (8)$$

$$\phi_c = \frac{c \lambda_1 \phi_k + b \lambda_2 \phi_l + \lambda_1 (\phi_l - \phi_k)}{c \lambda_1 + b \lambda_2} x, \quad 0 \leq x \leq c \quad (9)$$

となる。(7)式に(8), (9)式を代入し極値を求めると、

$$\partial G(\phi_c) / \partial \phi_k = \{ a / (b \lambda_1 + c \lambda_2) \} (\phi_l - \phi_k) + a b \sigma_1 / 2 = 0 \quad (10)$$

として、 $\phi_k$  に関する節点方程式を得る。

#### 2. 4. Voronoi-Delaunay相互変換

(a) Delaunay系からVoronoi系への変換

第2(a)図に示すDelaunayの三角形について考える。Delaunay系の試行関数(5)式から明らかのように、Delaunay系の離散化は、常にDelaunayの三角形の辺に沿ったポテンシャルの変化率  $\partial \phi / \partial t$  を隣接する他の三角形と共通にな

るようになっていく。しかし、Delaunayの三角形全体では、明らかにDelaunayの三角形の辺の法線方向の変化率 $\lambda (\partial \phi / \partial n)$ も含んでいる。Delaunayの三角形内部における辺の法線方向成分を求めるために、Delaunayの三角形の外心の節点ポテンシャル $\phi_{k'}$ を考える[第2(b)図]。このときsource density $\sigma$ はすべてのDelaunayの三角形の頂点に集中されているから、満足すべき支配方程式は、次式となる。

$$\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (11)$$

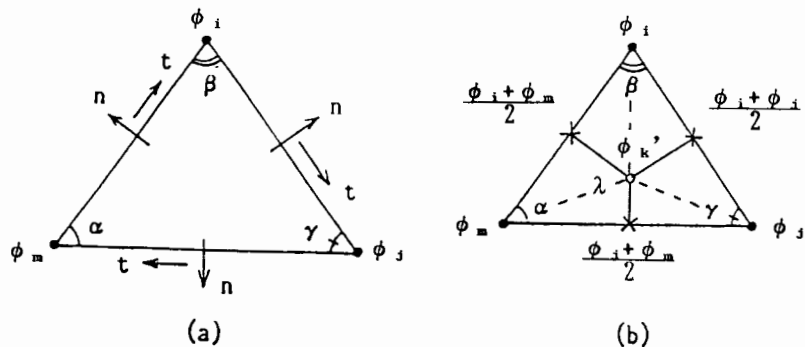
第2(b)図に示すように $\phi_{k'}$ を6個の直角三角形の頂点に位置すると考え、これにDelaunay系の離散化法を適用すれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} & (\lambda/2)(\tan \alpha + \tan \gamma) \phi_i + (\lambda/2)(\tan \alpha + \tan \beta) \phi_j \\ & + (\lambda/2)(\tan \beta + \tan \gamma) \phi_m - \lambda (\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma) \phi_{k'} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

(12)式は(11)式を離散化した式であり、 $\phi_{k'}$ は、第2(a)図のDelaunayの三角形内で法線方向の変化率 $\lambda (\partial \phi / \partial n)$ を満足するポテンシャルとなる。同様にして、他のDelaunay系の節点ポテンシャルとDelaunayの三角形の外心に位置するポテンシャルの関係を求めると、Delaunayの三角形の各辺の法線方向のポテンシャルの変化率を満足するベクトル $\Phi_{c'}$ は、

$$\Phi_{c'} = C_{pc} \Phi_p \quad (13)$$

と表わせる。ここで、 $C_{pc}$ はDelaunay系からVoronoi系への変換行列、 $\Phi_p$ はDelaunay系の節点ポテンシャルベクトルである。



第2図 (a) 離散化されたDelaunay系とDelaunayの三角形。  
(b) Delaunayの三角形の分割と法線方向の変化率 $\lambda (\partial \phi / \partial n)$ を満足するポテンシャル $\phi_{k'}$ 。

(b) Voronoi系からDelaunay系への変換

第3(a)図に示す離散化された Voronoi系とDelaunayの三角形を考える。

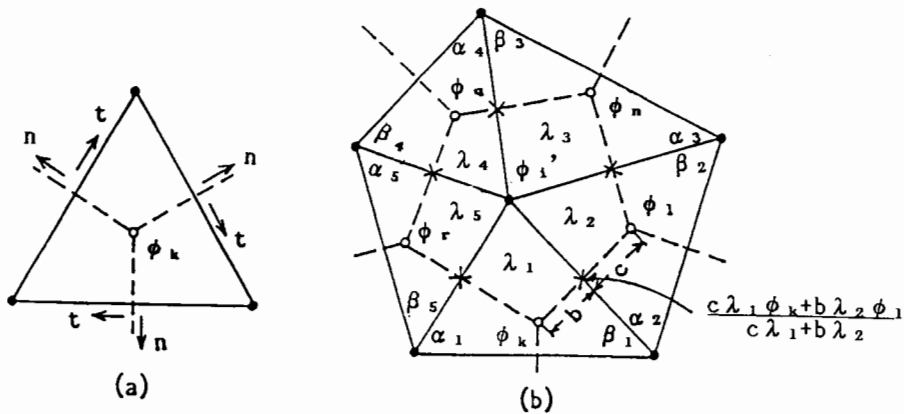
Voronoi系の試行関数(8), (9)式から明らかなように, Voronoi系の離散化は, 常に, Delaunayの三角形の各辺の法線方向の変化率 $\lambda(\partial\phi/\partial n)$ を隣接するDelaunayの三角形と共通になるように行っている。しかし, Delaunayの三角形全体では, 明らかにDelaunayの三角形の辺の接線方向の変化率 $\partial\phi/\partial t$ も含まれている。Delaunayの三角形の各辺の接線方向の変化率 $\partial\phi/\partial t$ を求めるために, Delaunayの三角形の頂点の節点ポテンシャル $\phi_i'$ を考える[第3(b)図]。このとき, source density $\sigma$ はすべて Voronoiの多角形の頂点に集中されているから, 満足すべき支配方程式は, (11)式となる。第3(b)図に示すように Voronoiの多角形が三角形に分割されたとして, Delaunayの三角形の頂点に位置するポテンシャル $\phi_i'$ にDelaunay系の離散化法を適用すれば,

$$(1/2)\{-(\lambda_1 \cot \alpha_1 + \lambda_2 \cot \beta_2) \phi_{k1} - (\lambda_2 \cot \alpha_2 + \lambda_3 \cot \beta_3) \phi_{1n} - (\lambda_3 \cot \alpha_3 + \lambda_4 \cot \beta_4) \phi_{nq} - (\lambda_4 \cot \alpha_4 + \lambda_5 \cot \beta_5) \phi_{qr} - (\lambda_5 \cot \alpha_5 + \lambda_1 \cot \beta_1) \phi_{kr}\} + (1/2) \sum_{j=1}^5 \lambda_j (\cot \alpha_j + \cot \beta_j) \phi_i' = 0, \quad (14)$$

を得る。但し,  $\phi_{k1}$ は, Voronoiの多角形の辺とDelaunayの三角形の辺の交点に位置するポテンシャルである。Voronoi系の節点ポテンシャル $\phi_k$ と $\phi_1$ を用いると,  $\phi_{k1}$ は,

$$\phi_{k1} = (c \lambda_1 \phi_k + b \lambda_2 \phi_1) / (c \lambda_1 + b \lambda_2), \quad (15)$$

で与えられる。他の Voronoiの多角形の辺とDelaunayの三角形の辺の交点に位置するポテンシャル $\phi_{1n}$ ,  $\phi_{nq}$ ,  $\phi_{qr}$ ,  $\phi_{kr}$ も同様に与えられる。(14), (15)



第3図 (a) 離散化された Voronoi系とDelaunayの三角形。  
 (b) Voronoiの多角形の分割と接線方向の変化率 $\partial\phi/\partial t$ を満足するポテンシャル $\phi_i'$ 。

式は(11)式を離散化した式であり、 $\phi_i'$ はDelaunayの三角形の各辺に沿った変化率 $\partial\phi/\partial t$ を満足するポテンシャルとなる。同様に、他のVoronoi系の節点ポテンシャルとDelaunayの三角形の頂点に位置するポテンシャルの関係を求めると、Delaunayの三角形の各辺の接線方向のポテンシャルの変化率を満足するベクトル $\Phi_p'$ は、

$$\Phi_p' = C_{cp} \Phi_c \quad , \quad (16)$$

と表わせる。ここで、 $C_{cp}$ はVoronoi系からDelaunay系への変換行列、 $\Phi_c$ はVoronoi系の節点ポテンシャルベクトルである。

### (c) Hybrid ポテンシャル

Delaunayの三角形とVoronoiの多角形の各頂点の中間に位置する点のベクトル $\Phi_m$  (Hybrid ポテンシャル) は、 $\Phi_p$ 、 $\Phi_c$ から線形補間して表わす行列を $C_{m1}$ 、 $C_{m2}$ とすれば、

$$\Phi_m = C_{m1} \Phi_p + C_{m2} \Phi_c \quad , \quad (17)$$

で与えられ、(13)、(16)式から、

$$\Phi_m = C_{m1} C_{cp} \Phi_c + C_{m2} \Phi_c = C_{M1} \Phi_c \quad , \quad (18)$$

$$\Phi_m = C_{m1} \Phi_p + C_{m2} C_{pc} \Phi_p = C_{M2} \Phi_p \quad , \quad (19)$$

とも書ける。

### (d) Hybrid Functional

Delaunay系のFunctionalは上限から、Voronoi系のFunctionalは下限から収束するため、両者の平均値は、互いの誤差を打ち消し精度の良いものとなることが報告されている。この両者の平均のFunctionalをHybrid Functionalという。Hybrid Functionalは、(4)、(7)式から、

$$H = (1/2) \{ F(\Phi_p) + G(\Phi_c) \} \quad , \quad (20)$$

で与えられる。この式は、(13)、(16)式から、

$$H = (1/2) \{ F(\Phi_p) + G(C_{pc} \Phi_p) \} \quad , \quad (21)$$

$$H = (1/2) \{ F(C_{cp} \Phi_c) + G(\Phi_c) \} \quad , \quad (22)$$

と書くことができる。

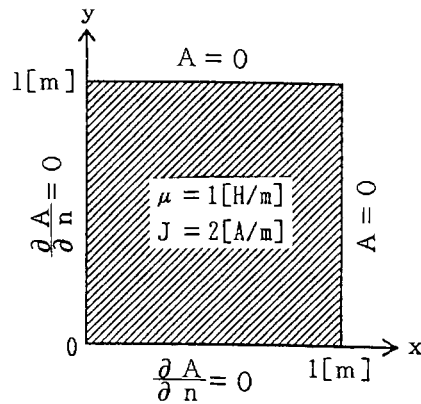
## 2.5. 例題

### 2.5.1. ポアソン問題

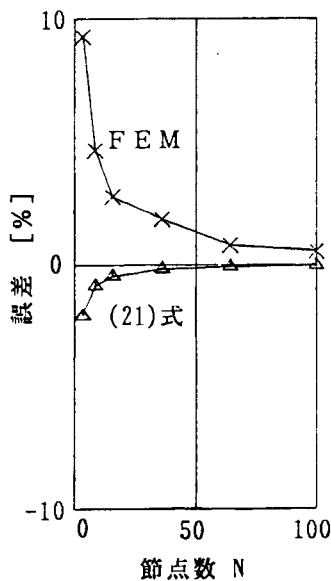
第4図に示す正方形の高透磁率材料に電流がz方向に流れている場合について考える。この場合の支配方程式は、

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -J \quad , \quad (23)$$

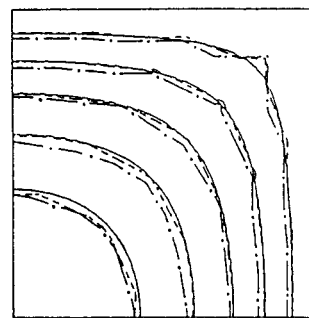
となり、(1)式のポテンシャル $\phi$ はz方向のベクトルポテンシャルA、source density  $\sigma$ は電流密度J、媒質のパラメータ $\lambda$ は透磁率の逆数 $1/\mu$ に対応している。第5(a)図にはFunctionalの収束性、第5(b)図にはポテンシャル分布を示す。この問題においては、(16)式のVoronoi系からDelaunay系の変換は成り立ったが、(13)式のDelaunay系からVoronoi系の変換は成り立たなかった。第5(a)図から、有限要素法よりも約一桁程度少ない節点数で同程度の精度の解が得られることがわかり、Voronoi-Delaunay相互変換法は極めて高速に高精度の解が得られることが理解できる。



第4図 高透磁率材料。



(a)



FEMの節点 9  
 Delaunay系の節点 9  
 Voronoi系の節点 9  
 ————— 解析解  
 - - - - - (18)式  
 - · - · - FEM

(b)

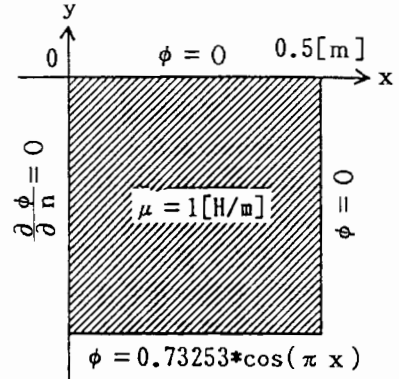
第5図 (a) Functionalの収束性。  
 (b) ポテンシャルの分布。

## 2.5.2. ラプラス問題

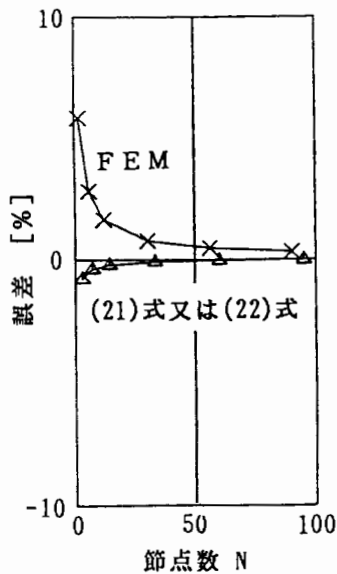
第6図に示すように、回転機のアギャップを正方形にモデル化した場合について考える。この場合の支配方程式は、

$$\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad (24)$$

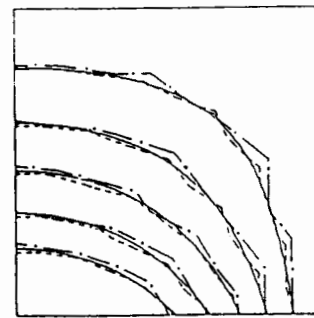
となり、(1)式の $\phi$ はスカラーポテンシャル $\phi$ 、 $\sigma$ は零、 $\lambda$ は透磁率 $\mu$ に対応している。第7(a)図にFunctionalの収束性、第7(b)図にはポテンシャルの分布を示す。この問題に対しては、(13)式と(16)式が成り立ち、Voronoi-Delaunay相互変換が両方向に可能であった。第7(a)、(b)図から、ラプラス問題に対しても、Voronoi-Delaunay相互変換法は極めて強力な方法であることがわかる。



第6図 回転機のアギャップ。



(a)



FEMの節点 6  
 Delaunay系の節点 6  
 Voronoi系の節点 9  
 ————— 解析解  
 - - - - - (18)式  
 - · - - - FEM

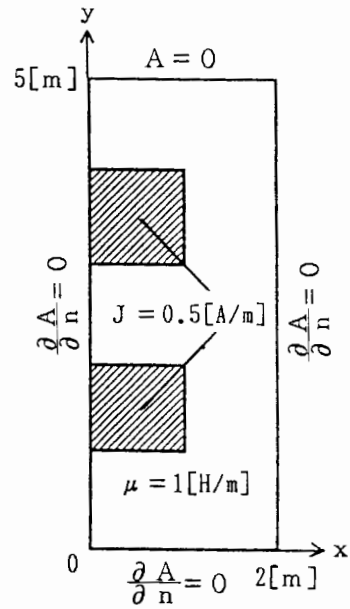
(b)

第7図 (a) Functionalの収束性。  
 (b) ポテンシャルの分布。

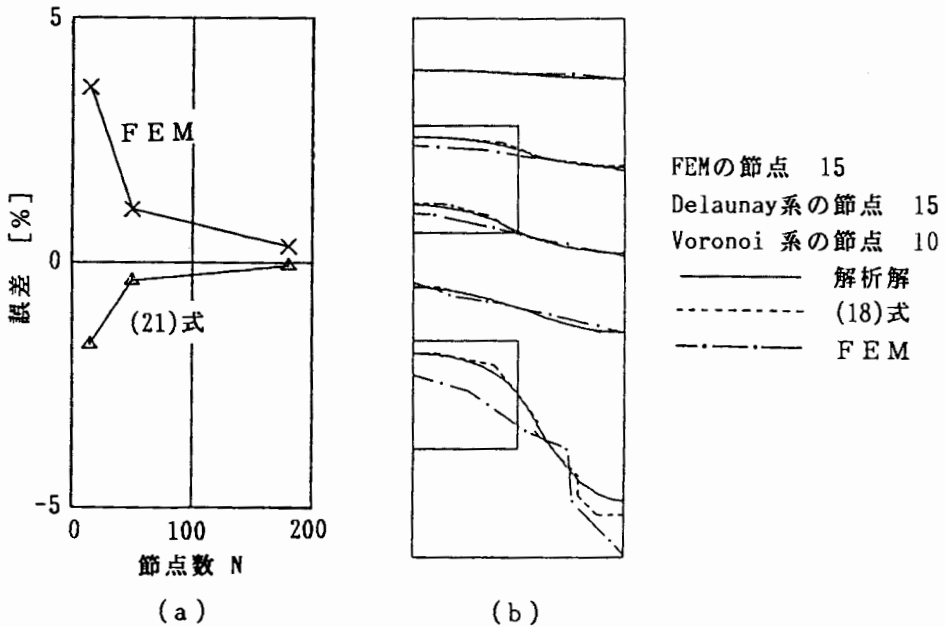


2. 5. 3. ポアソン・ラプラスが混在する問題

第8図に示すように、全開形Slotのモデルを考える。この問題は、明らかにポアソン・ラプラスが混在している問題である。すなわち、導体部分ではポアソンの式、絶縁物中ではラプラスの式が成り立つ。第9(a)図にFunctionalの収束性、第9(b)図にはポテンシャルの分布を示す。この問題においては、(13)式は成り立たず、(16)式は成り立った。第9(a)、(b)図から、(16)式のVoronoi系からDelaunay系への変換により極めて少ない節点で高精度の解が、この問題に対しても得られることがわかった。



第8図 全開形Slot。



第9図 (a) Functionalの収束性。  
(b) ポテンシャルの分布。

### 3. 結言

従来のVoronoi-Delaunay法では、有限要素法に比較して約一桁程度少ない節点方程式をVoronoi系とDelaunay系でそれぞれ解く必要があった。しかし、本稿では、有限要素法よりも約一桁程度少ない節点方程式をVoronoi系だけについて解けばよく、Delaunay系の解ベクトルやFunctionalはVoronoi-Delaunay変換で求まることを示した。従って、ポアソンやラプラスの方程式で支配される電磁界分布は、従来の有限要素法に比較して圧倒的に高速に算定できることが明らかにされた。

#### 参考文献

- [1] Y.Saito et al, IEEE Trans. Magnetics, Vol.MAG-22, No.5(1986), pp.1057-1059.
- [2] Y.Saito et al, Journal of Applied Physics, Vol.63, No.8(1988), pp.3174-3178.
- [3] 斎藤 他, "Voronoi-Delaunay離散化法による電磁界計算 -固有値問題への応用と相互変換-", "MAG-88-99,電気学会 マグネティクス研究会資料, 昭和63年4月23日.