

## Voronoi-Delaunay離散化法による電磁界計算

—固有値問題への応用と相互変換—

Electromagnetic Field Computation using Voronoi-Delaunay  
Discretization齋藤 兆古 , 中沢 良浩 , 早野 誠治  
Y.Saito , Y.Nakazawa and S.Hayano法政大学 工学部  
College of Engineering, Hosei University

## 1. まえがき

筆者等は、電気・磁気装置の電磁界を高速に且つ高精度に算定するVoronoi-Delaunay離散化法を提唱してきた[1,2]。このVoronoi-Delaunay離散化法は、Voronoi系とDelaunay系で同一問題を独立に解き、結果を組み合わせる方法であり、従来のも三角形一次要素を使う有限要素法に比較して圧倒的に高速で高精度の結果を与えることを報告した。

本報告では、Voronoi-Delaunay離散化法を、マイクロ波磁気工学で重要な構成要素であるウェーブガイドにおける固有値問題に適用し、有限要素法に比較して極めて高速に高精度な固有値と固有ベクトルが算定できることを示す。さらに、Voronoi系とDelaunay系の相互変換の可能性を吟味し、より高速で高精度に固有値と固有ベクトルが得られることを報告する。

## 2. Voronoi-Delaunay離散化法

## 2.1 数学的モデル

$\phi$  を z 方向成分の電界 E 又は磁界 H とし、 $k_c^2 = k_0^2 - \beta^2$  を満足する定数を  $k_c^2$  とし、支配方程式は次式で与えられるものとする。

$$\nabla^2 \phi + k_c^2 \phi = 0 \quad (1)$$

ここで、 $k_0$  は自由空間の波数であり、 $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  を満足する。また  $\beta$  は z 方向の伝播定数であり、 $\omega = 2\pi f$  で自由空間の角周波数である。(1)式で  $\phi = E_z$  とした場合、TMモードとなり、ウェーブガイドの壁での境界条件は

$$\phi = 0 \quad (2)$$

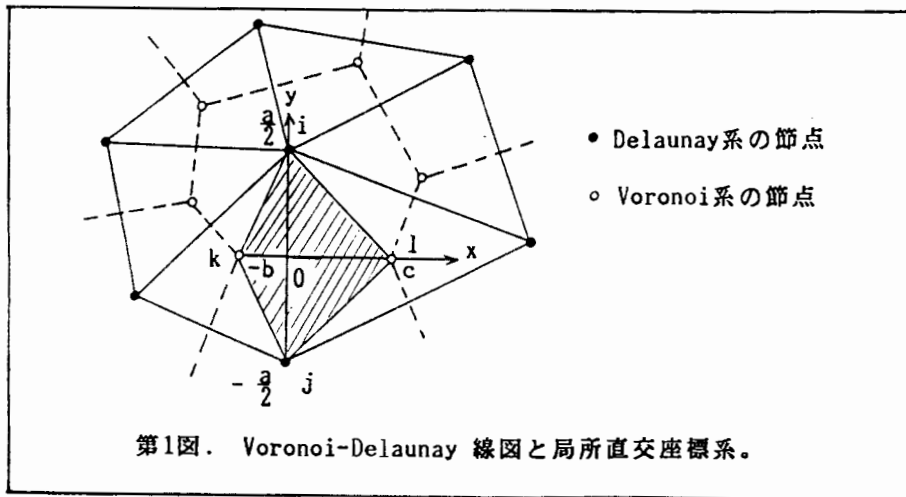
となる。(1)式で、 $\phi = H_z$ とした場合、TEモードとなり、ウェーブガイドの壁での境界条件は

$$\partial \phi / \partial n = 0 \quad , \quad (3)$$

となる。

## 2. 2 Voronoi-Delaunay線図

第1図に示すように、空間に節点を与えられたとき、各節点に空間を割りふると各節点を取り囲む多角形が形成される。この多角形をVoronoiの多角形という。Voronoiの多角形の辺を垂直に分割する線分で各節点間を結ぶと三角形のメッシュが形成される。この三角形をDelaunayの三角形という。Delaunayの三角形の各辺は、Voronoiの多角形の辺によって垂直に二等分され、Voronoiの多角形の頂点はDelaunayの三角形の外心に位置する。このような両者の関係から、Voronoiの多角形を与えられると自動的にDelaunayの三角形が決定され、逆にDelaunayの三角形を与えられるとVoronoiの多角形が形成できる。第1図に斜線で示されているような、Voronoiの多角形の二頂点とDelaunayの三角形の二頂点からなる四辺形を一要素として考えると、常に局所直交座標系が形成される。Voronoi-Delaunay線図における、このような局所直交性を利用して、Voronoi系とDelaunay系を独立に定式化する方法が、Voronoi-Delaunay離散化法である。Delaunayの三角形を与えられたとき、Voronoi系のメッシュが自動的に決定される幾何学的性質は、Delaunay系とVoronoi系は完全に独立でなく、Delaunay系の諸量がVoronoi系の諸量と密接に関係していることを暗示している。すなわち、Delaunay系とVoronoi系の相互変換の可能性を示している。



### 2.3 試行関数

第1図で、Delaunay系の節点*i*、*j*およびVoronoi系の節点*k*、*l*で囲まれる斜線部の要素に対して、次式の試行関数を考える。

$$\phi = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x y \quad (4)$$

(4)式を第1図の節点*i*、*j*、*k*、*l*に適用すると、

$$\begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \\ \phi_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a/2 & 0 \\ 1 & 0 & -a/2 & 0 \\ 1 & -b & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

の関係を得る。(5)式右辺の係数行列は、その行列式の値が零であるため、係数*a*<sub>0</sub>、*a*<sub>1</sub>、*a*<sub>2</sub>、*a*<sub>3</sub>を決定できない。従って、第1図の局所直交座標系では、*x*軸方向(Voronoi系)と*y*軸方向(Delaunay系)で独立な試行関数を定義しなければならない。

Delaunay系の試行関数は、Lagrange補間により

$$\phi_p = \frac{1}{2} (\phi_i + \phi_j) + \frac{1}{a} (\phi_i - \phi_j) y, \quad (6)$$

となる。同様に、Voronoi系の試行関数は

$$\phi_c = \frac{1}{b+c} (c \phi_k + b \phi_l) + \frac{1}{b+c} (\phi_l - \phi_k) x, \quad (7)$$

で与えられる。

### 2.4 節点方程式

(1)式の波動方程式を第1図の局所直交座標系で離散化することを考える。このとき、試行関数は、(6)式と(7)式のように*x*方向と*y*方向で独立となるから、(1)式も次式のように

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1}{2} k_c^2 \phi = 0, \quad (8)$$

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} k_c^2 \phi = 0, \quad (9)$$

分解できると仮定する[1,2]。(8)式に対する汎関数は、

$$F(\phi_p) = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b}^c \{ (\partial \phi_p / \partial y)^2 - (1/2) k_c^2 \phi_p^2 \} dx dy, \quad (10)$$

で与えられるから、(10)式に(6)式を代入し極値を求めると、

$$\begin{aligned} \partial F(\phi_p) / \partial \phi_i &= \{ (b/a) + (c/a) \} (\phi_i - \phi_j) \\ &\quad - (k_c^2 / 48) \{ (7ab + 7ac) \phi_i + (5ab + 5ac) \phi_j \} = 0, \quad (11) \end{aligned}$$

として、 $\phi_i$ に関する節点方程式を得る。(9)式に対する汎関数は、

$$G(\phi_c) = - \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b}^c \{ (\partial \phi_c / \partial x)^2 - (1/2) k_c^2 \hat{\phi}_c^2 \} dx dy, \quad (12)$$

で与えられるから、(12)式に(7)式を代入し極値を求めると、

$$\partial G(\phi_c) / \partial \phi_k = \left( \frac{a}{b+c} \right) (\phi_i - \phi_k) + (k_c^2) \{ (ab+ac)/2 \} \phi_k = 0, \quad (13)$$

として、 $\phi_k$ に関する節点方程式を得る。

## 2. 5 固有値と固有ベクトル

(11)式と同様にして、他の節点ポテンシャルに対する節点方程式を得ることができ、全体としてのシステム方程式を次式のように書くことができる。

$$A_p \Phi_p = k_c^2 B_p \Phi_p. \quad (14)$$

(14)式を変形して、

$$(B_p^{-1} A_p - k_c^2) \Phi_p = 0, \quad (15)$$

を得る。(15)式から固有値 $k_c^2$ と対応する固有ベクトルが求まる。Voronoi系に対しても、(14)式と同様に、

$$A_c \Phi_c = k_c^2 B_c \Phi_c, \quad (16)$$

のシステム方程式が成り立ち、(16)式を変形して、

$$(B_c^{-1} A_c - k_c^2) \Phi_c = 0, \quad (17)$$

から固有値 $k_c^2$ と対応する固有ベクトルが決まる。(14)~(17)式で、 $A_p, B_p, A_c, B_c, \Phi_p, \Phi_c$ は、それぞれ(2)式又は(3)式の境界条件を満たすシステム方

程式の係数行列とベクトルであり、下添字pとcはDelaunay系とVoronoi系を示す。

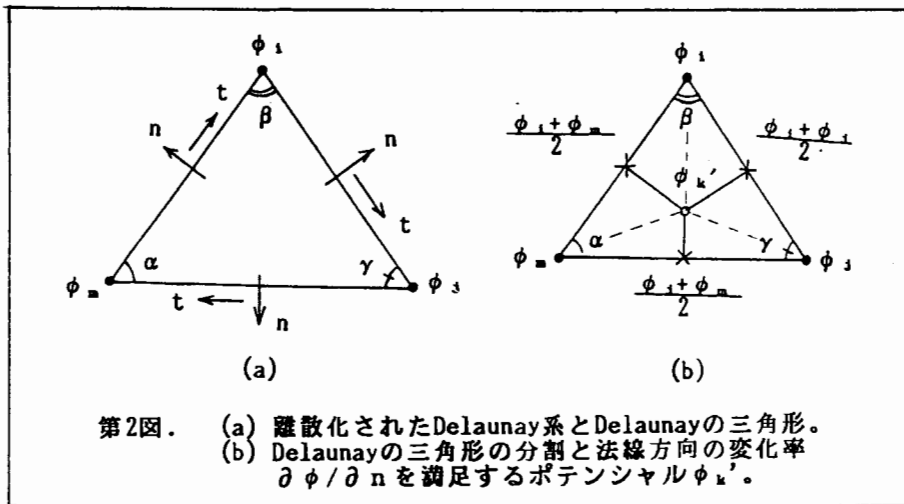
## 2.6 Voronoi-Delaunay変換

第2(a)図に示すDelaunayの三角形について考える。Delaunay系の試行関数(6)式から明らかのように、Delaunay系の離散化された結果は常にDelaunayの三角形の辺に沿ったポテンシャルの変化率 $\partial\phi/\partial t$ を隣接する他の三角形と共通にするように離散化している。しかし、Delaunayの三角形全体では、明らかに三角形の辺の法線方向の変化率である $\partial\phi/\partial n$ も含んでいる。Delaunayの三角形内部における、辺の法線方向成分を求めるために、第2(b)図に示すようにDelaunayの三角形の外心に節点ポテンシャル $\phi_{k'}$ を考える。このとき満足されるべき支配方程式は、

$$\nabla^2\phi = 0 \quad , \quad (18)$$

となる。これは、第2(a)図中の各節点ポテンシャルが既に離散化されたものであるため、(1)式で外部入力に相当する項、 $k_c^2\phi$ はDelaunayの三角形の各頂点ポテンシャルに含まれていることに起因する。第2(a)図のDelaunayの三角形が第2(b)図に示すように6個の直角三角形に分割されたものとして、 $\phi_{k'}$ を各三角形の頂点と考え、これにDelaunay系の離散化法を適用すれば(18)式は、

$$\begin{aligned} & (1/2)(\tan\alpha + \tan\gamma)\phi_i + (1/2)(\tan\alpha + \tan\beta)\phi_j \\ & + (1/2)(\tan\beta + \tan\gamma)\phi_m \\ & = (\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma)\phi_{k'} \quad , \quad (19) \end{aligned}$$



と離散化して表わされる。(19)式から、Delaunay系の節点ポテンシャル $\phi_i, \phi_j, \phi_m$ を代入することによって、Delaunayの三角形の辺に、法線方向成分を満足するポテンシャル $\phi_k'$ を得ることができる。(19)式と同様にして、他のDelaunay系の節点ポテンシャルとDelaunayの三角形の外心に位置するポテンシャルの関係を求めると、Delaunayの三角形の辺に法線方向成分を満足するベクトル $\Phi_c'$ は、

$$\Phi_c' = C_{pc} \Phi_p, \quad (20)$$

と表わされる。ここで $C_{pc}$ は、Delaunay系からVoronoi系への変換行列である。次に、第3(a)図に示す離散化されたVoronoi系とDelaunayの三角形を考える。Voronoi系の試行関数から明らかなように、Voronoi系は常にDelaunayの三角形の各辺に法線方向の変化率 $\partial \phi / \partial n$ を隣接するDelaunayの三角形と共通とするように離散化される。しかし、Delaunayの三角形全体では、Delaunayの三角形の辺に接線方向の変化率 $\partial \phi / \partial t$ も含まれている。Delaunayの三角形の辺に接線方向の成分を求めるために、第3(b)図に示すようにDelaunayの三角形の頂点に位置するポテンシャル $\phi_i'$ を考える。このとき満足されるべき支配方程式は、(1)式の入力に相当する項 $k_c^2 \phi$ が既に離散化されたVoronoi系に含まれているため、(18)式となる。第3(b)図に示すようにVoronoiの多角形が三角形に分割されたとして、Delaunayの三角形の頂点に位置するポテンシャル $\phi_i'$ にDelaunay系の離散化法を適用すれば、

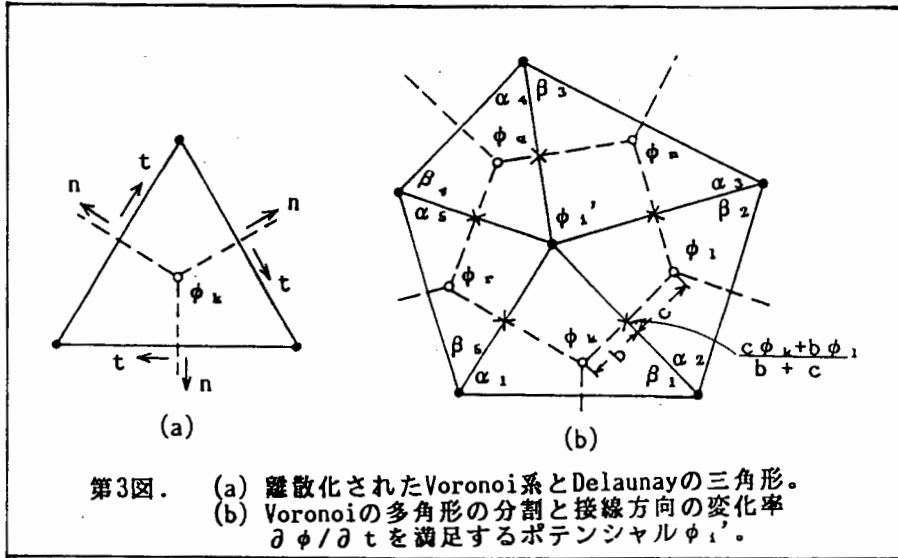
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ (\cot \alpha_5 + \cot \beta_2) \phi_k + (\cot \alpha_1 + \cot \beta_3) \phi_l \\ & + (\cot \alpha_2 + \cot \beta_4) \phi_n + (\cot \alpha_3 + \cot \beta_5) \phi_a \\ & + (\cot \alpha_4 + \cot \beta_1) \phi_r \} \\ & = \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^5 \cot \alpha_j + \sum_{j=1}^5 \cot \beta_j \right) \phi_i', \end{aligned} \quad (21)$$

の関係をj得る。(21)式を満足するポテンシャル $\phi_i'$ は、Delaunayの三角形の辺に接線方向成分を満足する。(21)式と同様にして、他のVoronoi系の節点ポテンシャルと、Delaunayの三角形の頂点に位置するポテンシャルの関係を求めると、Delaunayの三角形の辺に接線方向成分を満足するベクトル $\Phi_p'$ は、

$$\Phi_p' = C_{cp} \Phi_c, \quad (22)$$

と表わされる。ここで、 $C_{cp}$ はVoronoi系からDelaunay系への変換行列である。いま、(16)式のVoronoi系のベクトル $\Phi_c$ と(20)式のベクトル $\Phi_c'$ が、両者ともDelaunayの三角形の辺に接線方向成分を満足するベクトルであることから、等しいとすれば、Delaunay系のシステム方程式(14)式は、

$$(C_{cp}^T A_p C_{cp}) \Phi_c - k_c^2 (C_{cp}^T B_p C_{cp}) \Phi_c = 0, \quad (23)$$



第3図. (a) 離散化されたVoronoi系とDelaunayの三角形。  
 (b) Voronoiの多角形の分割と接線方向の変化率  $\partial \phi / \partial t$  を満足するポテンシャル  $\phi_1'$ 。

とVoronoi系に変換される。ここで、上添字Tは行列の転置を示す。(23)式のベクトル  $\Phi_c$  は、(17)式のベクトルと同じものであるから、(17)式と(23)式の平均、すなわち、

$$\left[ \frac{1}{2} (B_c^{-1} A_c + (C_{c,p}^T B_p C_{c,p})^{-1} (C_{c,p}^T A_p C_{c,p})) - k_c^2 \right] \Phi_c = 0 \quad (24)$$

から得られる固有値  $k_c^2$  はVoronoi系とDelaunay系の平均値となり、固有ベクトルはVoronoi系と一致するものが得られるであろう。

同様に、(14)式のDelaunay系のベクトル  $\Phi_p$  と(22)式のベクトル  $\Phi_p'$  が、両者ともDelaunayの三角形の辺に接線方向成分を満足するベクトルであることから、等しいとすれば、Voronoi系のシステム方程式(16)式は、

$$(C_{p,c}^T A_c C_{p,c}) \Phi_p - k_c^2 (C_{p,c}^T B_c C_{p,c}) \Phi_p = 0 \quad (25)$$

とDelaunay系に変換される。(25)式のベクトル  $\Phi_p$  は、(15)式のベクトル  $\Phi_p$  と同じものであるから、(15)式と(25)式の平均、すなわち、

$$\left[ \frac{1}{2} (B_p^{-1} A_p + (C_{p,c}^T B_c C_{p,c})^{-1} (C_{p,c}^T A_c C_{p,c})) - k_c^2 \right] \Phi_p = 0 \quad (26)$$

から得られる固有値  $k_c^2$  はVoronoi系とDelaunay系の平均値となり、固有ベクトルはDelaunay系と一致するものが得られるであろう。

さらに、Voronoiの多角形とDelaunayの三角形の各頂点の中間に位置する点のベクトル $\Phi_m$ (合成ポテンシャル)は、 $\Phi_m$ を $\Phi_p$ 、 $\Phi_c$ から線形補間して表わす行列を $C_{m1}$ 、 $C_{m2}$ とすれば

$$\Phi_m = C_{m1} \Phi_p + C_{m2} \Phi_c, \quad (27)$$

で与えられ、(20)式や(22)式から、(27)式は、

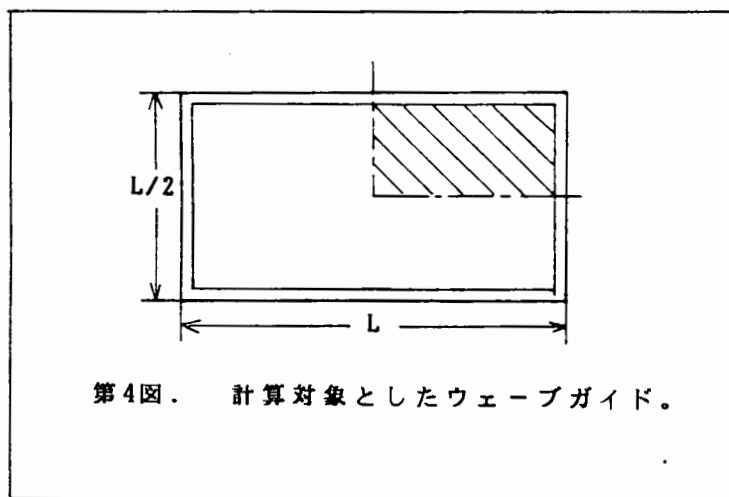
$$\begin{aligned} \Phi_m &= C_{m1} C_{cp} \Phi_c + C_{m2} \Phi_c \\ &= C_{M1} \Phi_c, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \Phi_m &= C_{m1} \Phi_p + C_{m2} C_{pc} \Phi_p \\ &= C_{M2} \Phi_p, \end{aligned} \quad (29)$$

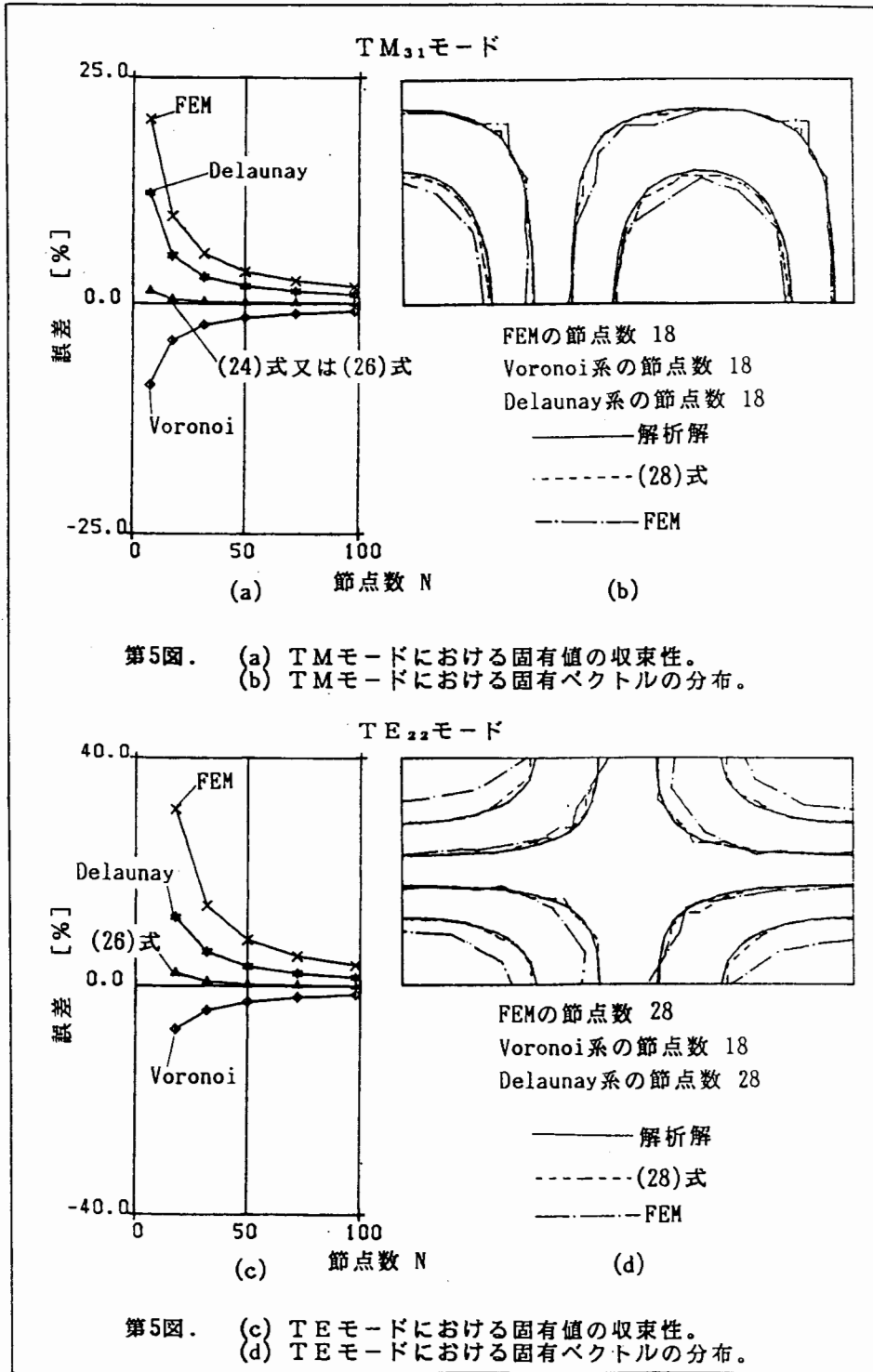
ともかける。

## 2. 7 例題

第4図に計算対象としたウェーブガイドを示す。対称性から実際に計算する部分は第4図の斜線部である。TMモードにおける固有値の計算結果を第5(a)図に示す。また、固有ベクトルの分布を第5(b)図に示す。第5(c)図にTEモードにおける固有値の計算例を示す。さらに、第5(d)図にTEモードにおける固有ベクトルの計算例を示す。尚、(24)式と(26)式のVoronoi系とDelaunay系の相互変換は、通常、節点数の少ない方から大きい方へ変換可能である。このためTMモードでは、相互変換が可能であるが、TEモードでは、(22)~(24)式が成り立ち、(25)、(26)式は成り立たない。第5(a)~5(d)図から、本稿で提案する方法により、極めて少ない節点数で高精度の解が得られることがわかる。







### 3. 結言

従来のVoronoi-Delaunay離散化法では、Delaunay系とVoronoi系のシステム方程式を独立に解き、結果を組合せる方法であった。本稿では、Voronoi系又は、Delaunay系のいずれか一方のみシステム方程式を解けば、他方の解を得られることが明らかになった。換言すれば、従来のVoronoi-Delaunay離散化法では、通常の三角形一次要素を用いる有限要素法に比較して、約1/10程度の未知数を持つシステム方程式を2回解く必要があったが、本稿で提案した相互変換により約1/10程度のシステム方程式を1回解くだけでよいことがわかった。

### 参考文献

- [1] Y.Saito et al, IEEE Trans.Magnetics, Vol.MAG-22,No5 (1986)pp. 1057-1059 .
- [2] Y.Saito et al, Journal of Applied Physics (MMM'87 Invited paper). to be appeared in April 1988 .