

イメージ行列における解精度の改善について

Improvement of Image Matrix Method

石田則道¹⁾、小口雄康²⁾、斎藤兆古³⁾

Norimichi ISHIDA, Yuko OGUCHI, Yoshifuru SAITO

- 1)工修) 法政大学 計算センター助手 (〒184 小金井市梶野町 3-7-2, ishida@ai.tama.hosei.ac.jp)
 2)理博) 法政大学 計算センター教授 (〒184 小金井市梶野町 3-7-2, oguchi-yuko@koganei.hosei.ac.jp)
 3)工博) 法政大学 計算センター所長 (〒184 小金井市梶野町 3-7-2, ysaitoh@ysaitoh.ee.hosei.ac.jp)

Previously, We have proposed an image matrix method solving for the ill posed system of equations. In the present paper, we propose a methodology for improving the solutions obtained by means of image matrix. Key idea is adding the zero column and row vectors to the system matrix. This makes it possible to remove the noise caused by data compression. Thus, We have succeeded in obtaining the dramatically improved solutions of ill posed system of equations

Key Words: Discrete Wavelet Transformation, Image Matrix, Ill-posed Linear System, Inverse Problems

1. はじめに

多くの物理・工学系問題は線形システムを解くことに帰する。例えば、偏微分方程式で記述される問題を数値的に解く場合、有限要素法や有限差分法などで離散化し、適切な境界・初期条件を果たすことで正則な係数行列を持つ線形システムが得られ、最終的にはこの線形システムを解くことに問題は帰する。このように順問題では、システムの係数行列が正則で一意的な解が期待できる。他方、ある物理系の出力の一部から、入力を求める逆問題では、多くの場合、積分方程式を解くことに帰着し、この積分方程式を離散化して得られる線形システムは係数行列が長方形列となり、結果として正則なシステム行列とならず、一意的な解が期待できない。この問題を解決する一方法として、線形系のシステム行列の要素をイメージデータと見なし、離散値系ウェーブレット変換によってシステム(イメージ)行列[1]の支配的要素を抽出することでシステムの近似解を得る方法を提案した[2]。しかしながら、ウェーブレット変換のデータ圧縮過程に起因する誤差が解に影響し、階段状の近似解もしくは、解の一部に誤差が集中する問題がある。本論文では、磁界から電流を求める逆問題にウェーブレット変換を適用して解いた場合、近似解の精度を改善する一方法を提案する。

2. ウェーブレット解析

(1) ウェーブレット変換

フーリエ解析では基本となる $\exp(i\omega t)$ という関数が

時間軸上に一様に広がっていることからそのフーリエスペクトラムは $\exp(i\omega t)$ の振幅を知るだけであり、事象の生じた時刻を特定することができない。そこで、周波数精度を多少犠牲にしても時刻の分解能を得るように時間軸上で局在した関数を選んで変換するのがウェーブレット解析である。ウェーブレット解析には連続系ウェーブレット変換と離散値系ウェーブレット変換[3]があり、前者はデータのパターンや相似性の解析などに、後者は収束性のよい正規直交系による展開を与えることからデータの圧縮やエネルギー解析などに応用される。

(2) ウェーブレット変換による逆問題解析

逆問題のシステム方程式は、次式のように記述できる。

$$\mathbf{X} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{Y} \quad (1)$$

$\mathbf{X}, \mathbf{C}, \mathbf{Y}$ はそれぞれ n 次の入力ベクトル、 n 行 m 列のシステム(イメージ)行列、および m 次の解ベクトルである。 W_n と W_m をそれぞれ n 次と m 次のウェーブレット変換行列をとすれば、(1)式のシステムのウェーブレット変換は次式のようにになる。

$$W_n \cdot \mathbf{X} = (W_n \cdot \mathbf{C} \cdot W_m^T) \cdot (W_m \cdot \mathbf{Y}) \quad (2)$$

ここで、(2)式の各演算を以下のように書くとする。

$$\begin{aligned} \mathbf{X}' &= \mathbf{W}_n \cdot \mathbf{X} \\ \mathbf{C}' &= \mathbf{W}_n \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{W}_m^T \\ \mathbf{Y}' &= \mathbf{W}_m \cdot \mathbf{Y} \end{aligned} \quad (3)$$

(2) は次のように書き替えられる。

$$\mathbf{X}' = \mathbf{C}' \cdot \mathbf{Y}' \quad (4)$$

\mathbf{C}' はイメージ行列のウェーブレット変換されたスペクトラム分布を示し、このウェーブレットスペクトラムは元のシステム行列 \mathbf{C} と同じ $n \times m$ の長方形行列である。このスペクトラム行列の要素の配置は、絶対値の大きい要素が 1 行 1 列を中心として分布する。イメージ行列全体の持つ情報をマザーウェーブレットの近傍に集めてしまうこのウェーブレット変換の性質を用いて全体の情報を維持しつつ長方形行列の逆行列を近似的に求めようとする考え方がウェーブレット変換による逆問題解析のキーポイントである。しかし、スペクトラム行列の特定領域に元のイメージ行列の情報を如何に集約しても $n \times m$ の長方形行列の逆行列は出来ない。そこで、マザーウェーブレットを含む式の数に等しい $n \times n$ の正方行列を取り出し、その行列でイメージ行列全体の情報を代表することが次のポイントである。このマザーウェーブレットを含む $n \times n$ の正方行列を \mathbf{C}'' とする。問題はこの取り出した行列 \mathbf{C}'' に逆行列が存在するかであり、ここでは \mathbf{C}'' の逆行列 \mathbf{C}''^{-1} が存在すると仮定し、形式的な逆行列の求め方を述べる。

次に $n \times m$ の行列の逆行列の形を仮定しなければならない。目的とする解 \mathbf{Y} の次数は m 、入力ベクトル \mathbf{X} の次数は n であるから、逆行列は元のイメージ行列 \mathbf{C} を転置した形の m 行 n 列になる。全てを零要素とする $m \times n$ の行列を \mathbf{C}_{zero} とすれば、スペクトラム行列 \mathbf{C}' の近似逆行列 \mathbf{C}'^{-1} は

$$\mathbf{C}'^{-1} = \mathbf{C}_{zero} + \mathbf{C}''^{-1} \quad (5)$$

で与えられる。この場合、 \mathbf{C}'^{-1} は \mathbf{C}_{zero} の 1 行 1 列から n 行 n 列の正方領域に \mathbf{C}''^{-1} が加わったものとする。次はこの近似逆スペクトラム行列 (\mathbf{C}'^{-1}) をウェーブレット逆変換して元の行列 \mathbf{C} の逆変換を作る。ウェーブレットスペクトル空間では (4) と (5) 式から、

$$\mathbf{C}'^{-1} \cdot \mathbf{X}' = \mathbf{Y}' \quad (6)$$

が成立し、(6) 式を書き直すと、

$$\mathbf{C}'^{-1} \cdot (\mathbf{W}_n \cdot \mathbf{X}) = \mathbf{W}_m \cdot \mathbf{Y} \quad (7)$$

となり、(7) 式の両辺に \mathbf{W}_m の転置 (逆) 行列 \mathbf{W}_m^T を

掛けると、

$$(\mathbf{W}_m^T \cdot \mathbf{C}'^{-1} \cdot \mathbf{W}_n) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y} \quad (8)$$

となる。従って、元のシステム行列 \mathbf{C} の近似行列 \mathbf{C}_{inv} は

$$\mathbf{C}_{inv} = \mathbf{W}_m^T \cdot \mathbf{C}'^{-1} \cdot \mathbf{W}_n \quad (9)$$

で求まる。

(3) 電流分布推定のシステム方程式

フィルム導体内の電流分布推定問題の概略図を以下に示す (図 1)。測定面で磁界分布 n 個が測定され、フィルム導体を通電方向に直角に m 個に分割した場合のシステム方程式はアンペア (Ampere) の法則 $H = i / (2\pi r)$ から、次式で記述できる。

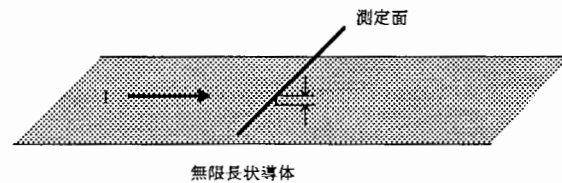


図 1 解析モデル

$$\mathbf{H} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{I}$$

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_{11}} & \frac{1}{r_{12}} & \dots & \dots & \frac{1}{r_{1m}} \\ \frac{1}{r_{21}} & \frac{1}{r_{22}} & \dots & \dots & \frac{1}{r_{2m}} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{r_{n1}} & \frac{1}{r_{n2}} & \dots & \dots & \frac{1}{r_{nm}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix} \quad (10)$$

$\mathbf{H}_n, \mathbf{C}_{nm}, \mathbf{I}_m$ はそれぞれ測定される n 次の磁界分布ベクトル、分割した各電流と測定間の距離、および求める m 次の電流分布ベクトルである。一般に、磁界測定点数 n は導体の分割数 m より、圧倒的に少なく $m \gg n$ の条件が成立する。すなわち、推定する電流分布の数は測定する点数よりはるかに多く、(10) 式のシステム方程式は一意的な解を持たない。そこで、イメージ行列 \mathbf{C} を二次元データと見なし、ウェーブレット変換による近似逆行列解析で電流分布を推定する。測定点数として $n=16$ 、推定点数として $m=100$ とした。フィルム導体中の関数による厳密な 3 つの電流分布を図 2 に示す。

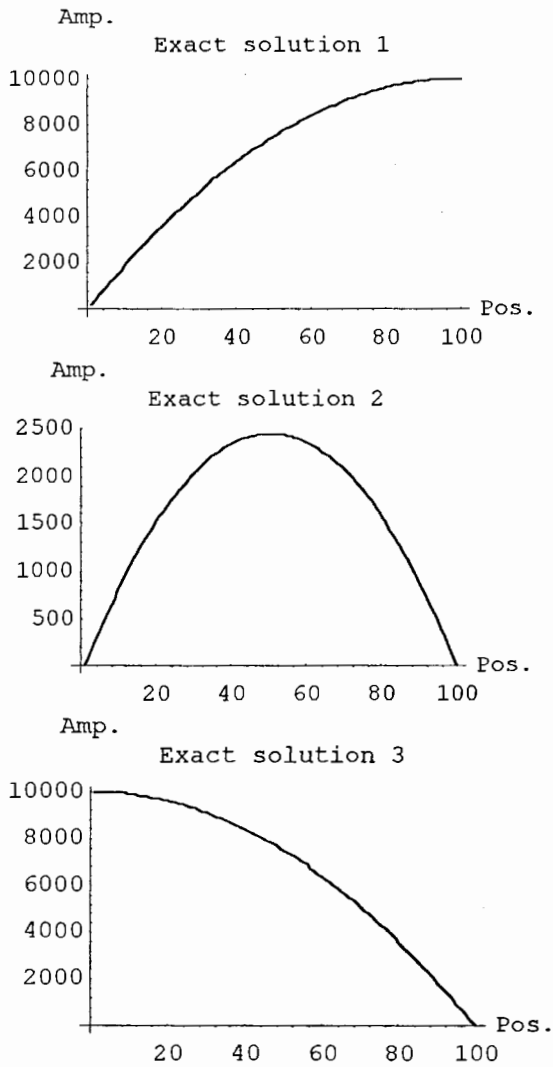


図2 厳密な電流分布

3. 解の改善法

(1) 近似解の誤差

ウェーブレット変換を用いた線形システムの近似解法は、高次の基底関数を用いた場合、解ベクトルを構成する先頭・終端部分の要素に誤差を生じる。これはウェーブレット変換が解の周期性を仮定していることに起因する。そこで、本論文では、解の周期性を長く仮定する高次の基底関数を用いた近似解の誤差を取り除く方法を検証する。

ノイズを含む減衰振動波形を高次の基底関数を用いて圧縮したとき、再現された波形はノイズが低減されるものの波形の端部に原波形には含まれていない振動が見られる。そこで、原波形を構成するベクトルの終端にゼロベクトルを追加した場合のウェーブレットスペクトラムを考える。マザーウェーブレット近傍だけを残し、他をゼロとすることでデータを圧縮し、逆変換を行った結果はゼロベクトルを追加した部分に周期性の仮定に起因する振動波形が現れる。この振動波形部分のベクトルは本来の波形に追加した部分ベクトルである。従って、圧縮データから再現された波形ベクトルの先頭部分ベクトルだけを取り出

せば、解の周期性を仮定したことに起因する振動成分は低減できる。

(2) データ圧縮による誤差

一次元データのモデル解として電流分布の64個のデータ(図3の実線)を16個のスペクトラムに圧縮した場合の誤差を調べる。ウェーブレット変換がデータの周期性を前提にしているため、図3の点線のように、明らかに両端部に誤差が発生している。そこで、50個のデータを16個のスペクトラムに圧縮することを考える。通常、離散値系ウェーブレット変換を用いる場合は離散化されたデータの個数は2のべき乗を取り扱うが、この場合、データの個数が2のべき乗でないため、ゼロを追加し64個のデータに整えてから16個のスペクトラムに圧縮し、50個までを見ると、端部の誤差が減少していることが読み取れる(図4の点線)。これが「ゼロ追加法」による圧縮データの誤差削減法である[4]。

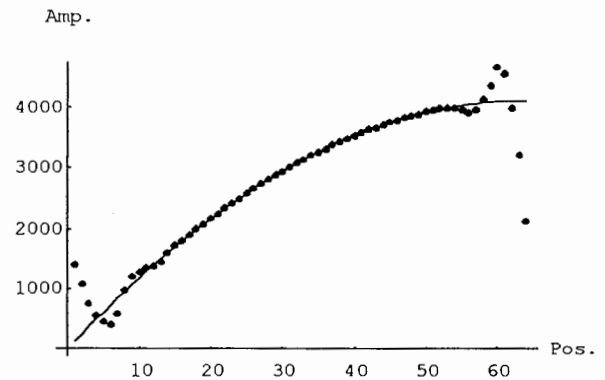


図3 電流分布(64個)

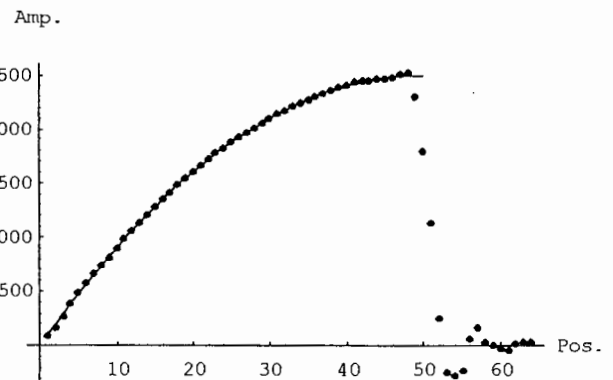


図4 電流分布(50個)

4. 不適切な線形システムでのデータ圧縮

(10)式において、 $n (=16)$ が $m (=100)$ より著しく小さく、さらに m が2のべき乗でない場合の電流推定問題を考える。イメージ行列を図5に示す。この図から隣接列ベクトル行列がほとんど同じ形状で、逆行列が取りにくいことが分かる。二次元イメージ行列をドビッチ

(Daubechies)の4次と8次[5]を用いウェーブレット変換する(図6)。

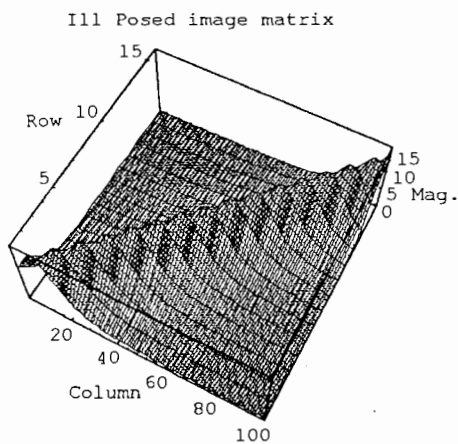


図5 イメージ行列
Wavelet spectrum.

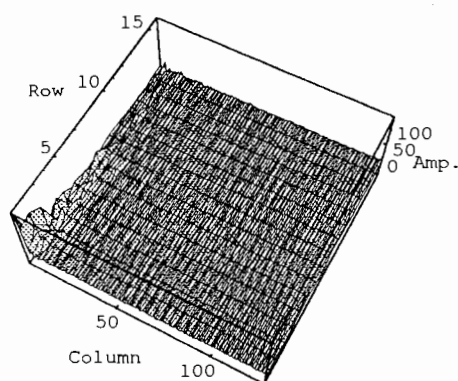


図6 ウェーブレットスペクトラム

ウェーブレット変換スペクトラムで、マザーウェーブレットを含む値の正方領域 (16×16) を切り出し、その部分の逆行列を作る。続いて測定される磁界のウェーブレット変換から、スペクトラム空間での近似解を求める。近似解にゼロを加え、スペクトラム空間での近似解の大きさを元のサイズ (128) に戻し、逆変換して原空間での近似解が図7である。図2と比較して良い近似になっている。

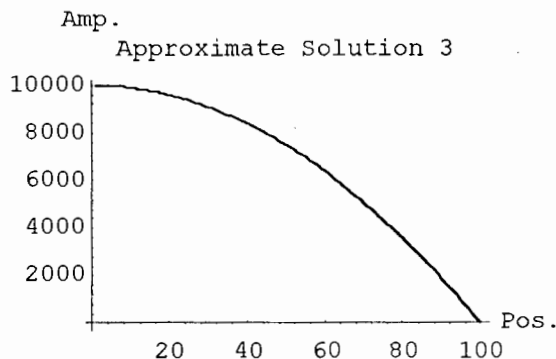
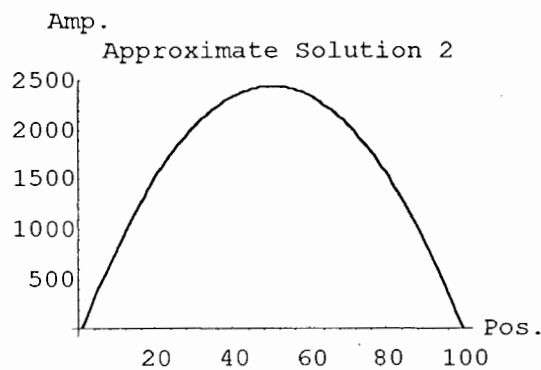
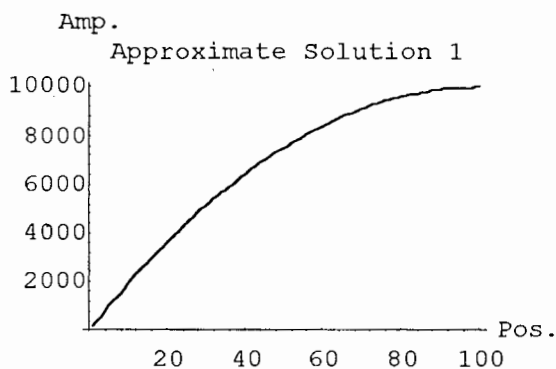


図7 推定電流分布

5. まとめ

線形システムをウェーブレット変換して、そのシステム固有の特徴を抽出することで、近似解を得た。その結果、ウェーブレット変換はデータの周期性を仮定しているため、求める解の周期性が未知である場合、基底の取り方により解に影響を及ぼす。低次基底は解に対して短い周期を仮定し、高次の基底になるほど長い周期を仮定する。このため最も解の周期性を短くと仮定するドビッシーの2次またはハール (Haar) 基底が解に対して汎用性が高い基底となるが、解は階段状になり、近似の精度は高くない。一方、高次基底は入力に対する基底では、入力情報を最も豊富に原点付近に集中することが分かっている。しかし、高次基底を用いると解の周期性から境界部分で大きな誤差が生じる。これを改善するために解ベクトルの端部がゼロ要素になっていると仮定することで、解ベクトルの終端部における誤差を取り除き、滑らかで精度の良い近似解が得られた。

参考文献

- 1) A. Bruce, D. Donaho, H. Gao: "Wavelet analysis", IEEE SPECTRUM OCTOBER 1996
- 2) 齊藤兆古: Mathematicaによるウェーブレット変換, 朝倉書店, 1996
- 3) W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery: "NUMERICAL RECIPES in C", CAMBRIDGE U. PRESS 1985
- 4) K. Yoda, Y. Saito: "A Wavelet Transform Approach to Inverse Problems of Vandermonde Type System", IEEE Trans. Magnetics, in printing
- 5) I. Daubechies: "Ten Lectures on Wavelets", SIAM 1995