

305

知的可視化ツールウェーブレット —ウェーブレット変換の基礎と応用—

齋藤 兆古[○](法政大学)

Wavelets as a Smart Visualizing Tool —Introduction and Applications— Yoshifuru SAITO

ABSTRACT

Discrete wavelets transform is introduced as one of the smart visualizing technologies. A simple sorting of the numerical data leads to a generalized n-dimensional wavelets transform. A relationship between the characteristic vector and wavelets base function is discussed.

Simple examples demonstrate a usefulness of the wavelets for smart image visualizing technique in various fields, such as classical field theory, computer graphics and signal visualizing.

Keywords: Wavelets transform, Data sorting, Orthogonal vectors, Characteristic vectors

1. 結 論

ウェーブレット変換はフーリエ変換を拡張した概念から始まり、非直交基底を用いた連続系ウェーブレット変換の信号解析に対する有用性が示され、多くの工学・理学的応用がなされている。その後、ウェーブレットスペクトラムにエネルギーの概念が与えられる離散値系直交ウェーブレット変換が提唱され、スペクトラムの特性から信号を評価するフーリエ変換的概念から、原空間の信号を抽出・分解する新しい信号処理技術分野を確立しつつある¹⁾。

他方、1980年代から個人用計算機(パーソナルコンピュータ)は低価格化と高性能が相俟って急速に普及し、その結果、時間領域一次元信号から高次元の映像情報信号まで個人レベルでハンドリングが可能となりつつある。本稿はこのような現状を踏まえ、信号処理技術として有用な離散値系直交ウェーブレット変換について可能な限り簡明に述べる。

ウェーブレット変換に関して、極めて多くの文献が国内外を問わず出版されている。また、ウェーブレット変換のパッケージも販売されているにも拘らず、依然として本稿のような解説が必要とされる背景は、ウェーブレット変換が1980年代から始まった比較的新しい技術であるため、多くの文献がウェーブレット変換の物理的意味を把握するよりも寧ろ、理論的基礎について述べていることに一因があると考えられる。このため、本稿ではウェーブレット変換の物理的意味を主体として具体的な例題

を取り上げ、離散値系ウェーブレット変換が数値データを系統的に並べ替えをする手法であり、決して難解な数学的な手段で無いことを述べる。

さらに、離散値系ウェーブレット変換は直交基底関数を用いた線形変換の一種であり、大きな特徴は与えられたデータを、ある一定の条件下で直交するデータの和に変換する機能にあることを述べる。データを互いに直交するデータへ分解する作業はウェーブレット変換の原点となったフーリエ変換でも可能である。しかし、フーリエ変換は変換に用いる基底関数が正弦波と余弦波に限られているため、データが正弦波若しくは余弦波状にソーティングされていれば、互いに直交するデータの和へ変換できない。ところが、ウェーブレット変換は基底関数を選択で如何なるデータも互いに直交するデータの和へ変換可能である。本稿では、線形システムのモーダル解析法が一般化したウェーブレット変換の一種であることを紹介する。

2. 離散値系直交ウェーブレット変換

2.1 考え方

規則的にサンプリングされた2個の数値データ a, b からなるベクトル \mathbf{X} を考えよう。

$$\mathbf{X} = (a \ b)^T \quad (1)$$

ベクトル \mathbf{X} の性質を調べるため、ベクトル \mathbf{X} の平均(要素 a と b の重み付き平均)情報と変化率(要素 a と b 間の重み付き差分)情報へベクトル \mathbf{X} の要素をソート、すなわち、並べ替えることを考える。ベクトル \mathbf{X} の平均情報と変化率情報は、

$$\begin{aligned}
 X_{ave} &= c_0 a + c_1 b \\
 X_{var} &= c_2 a - c_3 b \\
 \text{or} \\
 \mathbf{X}' &= \mathbf{C}\mathbf{X} \\
 \mathbf{X}' &= \begin{pmatrix} X_{ave} \\ X_{var} \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ c_2 & -c_3 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2}$$

の形で表現できるであろう。(2)式で、 c_0, c_1, c_2, c_3 は重み定数であり、ベクトル \mathbf{X} と \mathbf{X}' の関係は、前者が(1)式に示す原ベクトルであり、後者が前者を構成する要素 a, b の平均情報(重み付き平均)と変化率情報(重み付き差分)を要素とするベクトルである。
つぎに、ベクトル \mathbf{X}' からもとのベクトル \mathbf{X} を次式で復元することを考える。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X} &= \mathbf{C}^T \mathbf{X}' \\
 \text{or} \\
 \mathbf{X} &= \mathbf{C}^T \mathbf{C}\mathbf{X}
 \end{aligned} \tag{3}$$

(3)式が成り立つためには

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}^T \mathbf{C} &= \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \text{or} \\
 c_0^2 + c_2^2 &= 1 \\
 c_0 c_1 - c_2 c_3 &= 0 \\
 c_1^2 + c_3^2 &= 1
 \end{aligned} \tag{4}$$

が成り立たねばならない。しかし、(4)式は式の数3個であるため、(4)式の条件だけでは4個の未知数 c_0, c_1, c_2, c_3 を決定出来ない。このため、ベクトル \mathbf{X} の要素 a, b が等しければゼロとなる条件

$$\begin{aligned}
 c_2 - c_3 &= 0 \\
 \text{or} \\
 c_2 &= c_3
 \end{aligned} \tag{5}$$

を追加すれば、(4)式から

$$\begin{aligned}
 c_0 c_1 - c_2 c_3 &= c_0 c_1 - c_2^2 = 0 \\
 \Rightarrow c_2 &= \sqrt{c_0 c_1}, \\
 c_0^2 + c_2^2 &= c_0^2 + c_0 c_1 = 1 \\
 \Rightarrow c_1 &= \frac{1 - c_0^2}{c_0}, \\
 c_1^2 + c_3^2 &= c_1^2 + c_0 c_1 = c_1^2 + (1 - c_0^2) = 1 \\
 \Rightarrow c_0 &= c_1,
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\therefore c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

として、(2)式の重み係数が得られる。(5)式の仮定を

行い、(1)式のベクトル \mathbf{X} が持つ平均情報と変化率情報へ変換する係数行列

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

をドビッシー(Daubechies)の2次基底関数と呼ぶ。2次基底関数と呼ばれる所以は、(2)式の変換行列で c_0

から c_3 まで4個の重み係数を仮定したが、実際に使

われる係数は $1/\sqrt{2}$ と $-1/\sqrt{2}$ の2個であることに起因する。

つぎに、(1)式のベクトル \mathbf{X} が4個の数値データから構成される場合、

$$\mathbf{X} = (a \ b \ c \ d)^T \tag{8}$$

に対してドビッシーの2次基底関数を使って平均情報と変化率情報へベクトル \mathbf{X} の要素をソート、すなわち、並べ替えることを考えよう。まず、(7)式をそのまま4次へ拡大して、

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}' &= \begin{pmatrix} X_{ave1} \\ X_{var1} \\ X_{ave2} \\ X_{var2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \\
 &= \mathbf{C}^{(1)} \mathbf{X}
 \end{aligned} \tag{9}$$

とすることは誰しも考え付くであろう¹⁾。しかし、(9)式はベクトル \mathbf{X} 全体としての平均情報と変化率情報とは言いがたい。このため、(9)式をさらに次式で並べ替える。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}'' &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{ave1} \\ X_{var1} \\ X_{ave2} \\ X_{var2} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{X}
 \end{aligned} \tag{10}$$

(10)式で得られるベクトル \mathbf{X}'' で、第1行の要素は(8)式のベクトル \mathbf{X} 全体の平均情報、第2行の要素は前半の要素 a, b と後半の要素 c, d 間の変化率、第3行と第4行の要素はそれぞれ隣接する要素 a, b と

c, d 間の変化率情報を表す。以上のソーティング、すなわち、並べ替え演算が実は、ドビッシーの2次基底関数を用いた1次元ウェーブレット変換と呼ばれ、ベクトル \mathbf{X} を構成する第1行の要素はマザーウェーブレットスペクトラム (mother wavelet spectrum)、第2行から4行までの要素はドーターウェーブレットスペクトラム (daughter wavelet spectrum) と呼ばれる。また、ベクトル \mathbf{X} の第1行要素 (ベクトル \mathbf{X} の平均情報) をレベル (level) ゼロのスペクトラム、第2行の要素 (前半の要素 a, b と後半の要素 c, d 間の変化率) をレベル1のスペクトラム、第3行と第4行の要素 (隣接する要素 a, b と c, d 間の変化率) をレベル3のスペクトラムと呼ぶ。フーリエ変換的な見方をすれば、明らかにレベルゼロは一定値 (直流分)、レベル1は第1次高調波成分、レベル2は第2次高調波成分に対応する。基底関数が正弦波でないため、厳密にフーリエ変換の高調波と対応しないが、意味合いは同じである。レベルゼロ, 1, 2 のウェーブレットスペクトラムをそれぞれ個々に逆変換すれば、ベクトル \mathbf{X} の一定値 (直流) から高周波成分まで独立に分離して取り出せる。これをウェーブレット変換の多重解像度解析 (multi-resolution analysis) と呼ぶ。多重解像度解析で得られた個々の成分の和はもとのベクトル \mathbf{X} を再現する。(10)式のウェーブレットスペクトラムベクトルベクトル \mathbf{X} が与えられ、(8)式のベクトル \mathbf{X} が厳密に再現される条件は、 I_4 を4次の単位正方行列として次式で与えられる。この条件が満足されることは具体的に計算すれば容易に確認できる。

$$(\mathbf{C}^{(2)})^T \cdot \mathbf{C}^{(2)} = I_4 \quad (11)$$

さらに、ベクトル \mathbf{X} の情報を偏りなくソーティング、すなわち、並べ替えできる条件はベクトル \mathbf{X} の次数が必ず2のべき乗個でなければならないことは自明であろう。

2.2 基底関数

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 \\ c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 & c_1 \\ c_1 & -c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & -c_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

2のべき乗個の要素からなるベクトル \mathbf{X} をソーティングする演算として最も簡明なドビッシーの2次基底関

数を用いたウェーブレット変換を導いた。ここでは、やや複雑に見えるがベクトル \mathbf{X} に周期性を仮定した(12)式の変換行列 \mathbf{C} を考える。

(12)式で、第1行はベクトル \mathbf{X} の要素1から4までにそれぞれ係数 c_0, c_1, c_2, c_3 を重みとする平均値を意味する。第2行はベクトル \mathbf{X} の要素1から4までにそれぞれ係数 c_0, c_1, c_2, c_3 を重みとする差分をとることを意味する。

換言すれば、(12)式の第1行は重みをつけた積分演算に対応するデジタルフィルターであり、第2行は重みをつけた微分演算に対応するデジタルフィルターである。第3, 4行はそれぞれベクトル \mathbf{X} の要素3から6までに對する積分と微分演算を行うことを意味する。したがって、積分と微分演算は2次基底関数の場合と同様にベクトルの2要素ずつ循環する形で行われる。

次に、逆変換を可能とするために(4)式と同様に次の条件を仮定する。

$$\mathbf{C}^T \mathbf{C} = I \quad (13)$$

ここで、 I は \mathbf{C} と同じ次数をもつ単位正方行列を示す。

(13)式は

$$\begin{aligned} c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 0 \\ c_2 c_3 + c_3 c_1 &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

を意味する。(4)式の場合と同様に式の数が未知数の数より少なく、(14)式から係数 c_0, c_1, c_2, c_3 を決めることはできない。このため、次の条件を追加する。

$$\begin{aligned} c_2 - c_2 + c_1 - c_0 &= 0 \\ 0c_3 - 1c_2 + 2c_1 - 3c_0 &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

(15)式で、最初の条件は入力データが一定値であればつねにゼロとなることを意味する。第2の条件は入力データが単調増加であってもつねにゼロであることを意味する。したがって、入力データが2次関数以上の変化率をもつとき、第1段階の差分演算を受けた項はゼロでない値をもつ。第2段階は重み付き積分もしくは平均値の項から2次関数以上の変化率を抽出する演算となる。このことから、この場合のウェーブレット演算は2次基底関数を用いたウェーブレット演算よりも大きな変化率を抽出する変換となる。

(14)式に(15)式の条件を追加することで

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, c_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \\ c_2 &= \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, c_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (16)$$

を得る。(16)式は4個の重み係数を持つため、ドビッシーの4次基底関数と呼ぶ。すなわち、(5)式や(15)式のよ

うに係数の個数が増加する毎に低次の変化分を系統的にゼロとする条件を付加することで得られる基底関数をドビッシーは導いた。また、(5)式や(15)式の条件を系統的に選択することで異なる基底関数が導かれる²⁾。

2.3 n次元ウェーブレット変換

ウェーブレット変換はフーリエ変換と同様に1次元からn次元データへ適用できる³⁾。ここでは、実用的で簡明な2次元ウェーブレット変換に関して述べる。

いま、m行n列からなる2次元配列 $X_{m \times n}$ のウェーブレット変換を考える。ここで、mとnは2のべき乗である。2次元配列 $X_{m \times n}$ をn次の列ベクトル $\mathbf{d}_i, i=1,2,..,m$, を使って書けば、

$$X_{m \times n} = (\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \dots \quad \mathbf{d}_m) \quad (17)$$

と書けるから、 C_n をn行n列からなるウェーブレット変換行列とすれば、

$$C_n X_{m \times n} = C_n (\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \dots \quad \mathbf{d}_m) \\ = (C_n \mathbf{d}_1 \quad C_n \mathbf{d}_2 \quad \dots \quad C_n \mathbf{d}_m) \quad (18)$$

の演算で、m個の列ベクトル $\mathbf{d}_i, i=1,2,..,m$, のウェーブレット変換が出来る。他方、2次元配列 $X_{m \times n}$ をm次の行ベ

クトル $\mathbf{e}_i^T, i=1,2,..,n$, を使って書けば、

$$X_{m \times n} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n^T \end{pmatrix} \quad (19)$$

と書けるから、 C_m をm行m列からなるウェーブレット変換行列とすれば、

$$X_{m \times n} C_m^T = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_m^T \end{pmatrix} C_m^T = \begin{pmatrix} [C_m \mathbf{e}_1]^T \\ [C_m \mathbf{e}_2]^T \\ \vdots \\ [C_m \mathbf{e}_m]^T \end{pmatrix} \quad (20)$$

の演算で、2次元配列 $X_{m \times n}$ を構成するm次の行ベクトル

$\mathbf{e}_i^T, i=1,2,..,n$, のウェーブレット変換が出来る。(19), (20)

式を纏めて書けば、2次元配列に対するフーリエ変換と同様な形でウェーブレット変換も

$$X'_{m \times n} = C_n X_{m \times n} C_m^T \quad (22)$$

の演算で行われる。

2.4 モーダルアナリシス

(22)式は明らかに線形変換である。要は線形変換に用いる変換行列が一定の条件、たとえば、(15)式のような条件を負わせて系統的に導ける点がウェーブレット変換の大きな特徴と言えよう。ここでは、古典物理学の集大成である場の理論から導かれる直交変換行列について述べ、ウェーブレット変換行列が固有ベクトルと密接な関係をもつことを指摘しよう。

場の理論によれば、あるソース密度 σ が与えるスカラーポテンシャル u の静的な分布は(23)式のポアソン方程式の解で与えられる³⁾。

$$\nabla^2 u = -\sigma \quad (23)$$

境界条件や幾何学的形状が単純な場合を除いて、(23)式の解析的な解は望めない。このため、多くの場合、(23)式のラプラシアン演算は数値的に置き換えて解く、数値解析法で(23)式を解く。有限要素法や有限差分法などを用いて(23)式を離散化して(24)式の線形システムを得る。

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}\mathbf{U} \quad (24)$$

(24)式の左辺の入力ベクトル \mathbf{F} は(23)式右辺のソース密度 σ と境界条件で決まる。解ベクトル \mathbf{U} はスカラーポテンシャル u を離散化した要素が構成するベクトルである。さらに、係数行列 \mathbf{C} は解ベクトルと同じ次数の正方対称行列であり、個々の要素は離散化法によって決まる³⁾。この係数行列 \mathbf{C} の固有値を考えよう。

$$\det[\mathbf{C} - \Lambda] = 0,$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (25)$$

ここで、(23)式の空間方向の全離散化数は n 点としている。(25)式から n 個の固有値が得られたとすれば、それぞれの固有値 $\lambda_i, i=1,2,..,n$, に対する固有ベクトル

$\mathbf{z}_i, i=1,2,..,n$, を列ベクトルとする n 行 n 列のモーダ

ル行列 $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1 \quad \mathbf{z}_2 \quad \dots \quad \mathbf{z}_n]$ が定義できる。(24)式の解

ベクトル \mathbf{U} は固有ベクトルの線形結合、すなわち、(26)

式の形で与えられると仮定する。

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z}\mathbf{V} \quad (26)$$

従って、(26)式を(24)式へ代入し変形すれば、固有ベクトルの直交性から

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{F} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{C} \mathbf{Z}) \mathbf{V} \\ = \Lambda \mathbf{V} \quad (27)$$

が得られる。行列 Λ は(25)式に与えられているように対角行列であるから、容易に逆行列が計算でき、ベクトル

V と U はそれぞれ、(28), (29)式で与えられる。

$$V = \Lambda^{-1}(Z^T F) \tag{28}$$

$$U = Z\Lambda^{-1}(Z^T F) = ZG \tag{29}$$

$$G = \Lambda^{-1}(Z^T F)$$

(24)式を(25)-(29)式のように固有値と固有ベクトルを用いて解く方法をモーダル解析(Modal Analysis)法という⁴⁾。

(22)式と(27)式を比較すれば、固有ベクトルを列ベクトルとする n 行 n 列のモーダル行列 Z は(22)式のウェーブレット変換行列に対応することがわかる。一般に、大きな値を持つ固有値に対応する固有ベクトルは空間的変化率の大きなポテンシャルを与える。すなわち、モーダル行列 Z を構成する固有ベクトル $z_i, i = 1, 2, \dots, n$, は、

固有値 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, が値の小さい順番に並べられているとすれば、空間周波数の低いポテンシャルから高い周波数ポテンシャルを与える。さらに、(29)式のベクトル G は空間周波数の異なる固有ベクトルに対する重み係数の役割を担う。すなわち、

$$U = ZG = \sum_{i=1}^n g_i z_i, \tag{30}$$

$$G = (g_1 \ g_2 \ \dots \ g_n)^T$$

である。

以上から、ウェーブレット変換は線形変換そのものであり、また、モーダル解析法のモーダル行列がウェーブレット変換行列へ対応する。ウェーブレット変換行列とモーダル行列の共通の性質は、両者ともに互いに直交する列ベクトルから構成される点にある。他方、モーダル行列は係数行列 C を(27)式右辺に示されているように、固有値を要素とする対角行列 Λ へ変換するが、ウェーブレット変換では完全な対角化がなされない。しかし、対角要素が大きな値を持つ行列へ変換される。このため、線形システムの近似解を得るのに有効である^{1, 2)}。

2.5 例題

Fig. 1 に示すリンゴの画像をドビッシーの 4 次基底関数を用いてウェーブレット変換してみよう。



Fig.1 Sample image

Fig. 2 は Fig. 1 のカラー画像を赤 (R)、緑 (G)、および青 (B) 成分である。リンゴのボディそのものは赤成分が大部分であり、緑成分は葉っぱの部分に多い。青成分は全体的に分布している。Fig. 3 が Fig. 2 の RGB 成分に対するウェーブレットスペクトラムである。

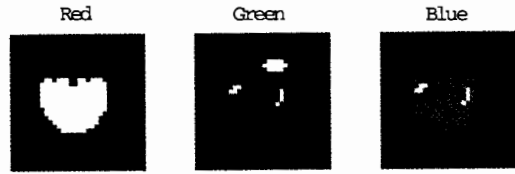


Fig.2 Red, green and blue components of the apple shown in Fig. 1

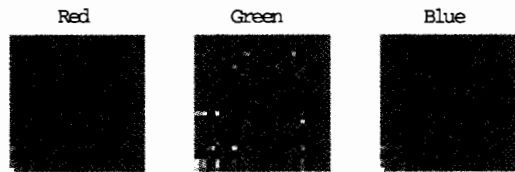


Fig.3 Wavelet spectra by Daubechies 4th order base function

Fig. 4 は多重解像度解析結果である。明らかに、低次レベルほど全体的な画像、すなわち、空間周波数の低い成分を表している。他方、高次レベルは輪郭が強調され、空間周波数の高い成分を表していることがわかる。

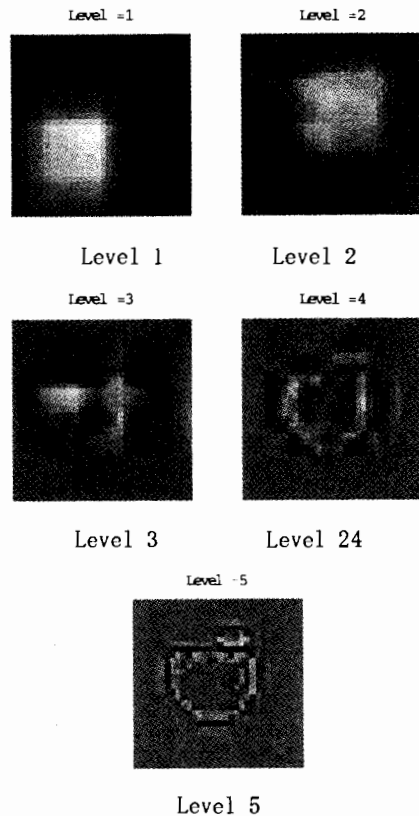


Fig. 4 Results of multi-resolution analysis

つぎは画像の再生成である。Fig.4 の各レベルを順次加算していくと、Fig. 5 に示すように全体的な画像から逐

次原画像が再現される。

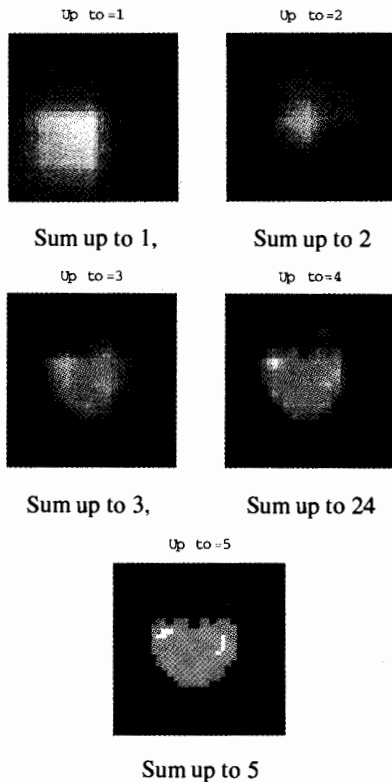


Fig. 5 Recovering process of the sample image

つづいて、モーダル解析法による画像処理である。Fig. 6は、9点有限差分でラプラシアン演算を近似して得られた Fig. 2のRGB成分のソースデンシティ分布である。Fig.7は9点有限差分ラプラシアン演算を近似して得られた係数行列の固有値分布である。Fig.8は固有値の絶対値が小である4個の固有値に対する固有ベクトルを示す。

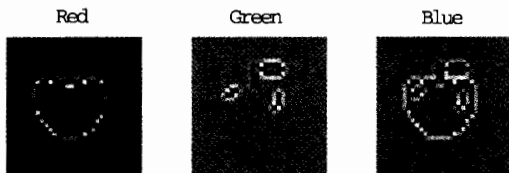


Fig.6 Image source densities

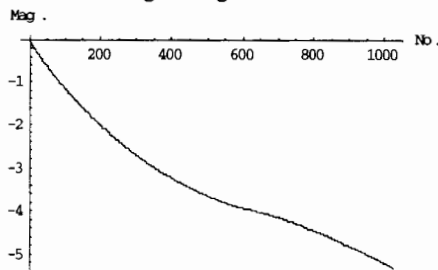


Fig. 7 Characteristic values of the sample image

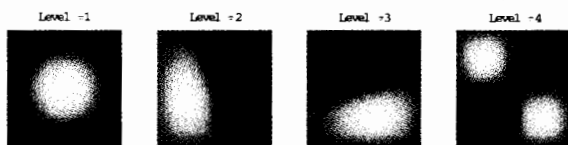


Fig.8 Characteristic vector distribution to the smaller 4 characteristic values

固有値は、画素数が 32×32 であるから、1024 個ある。

換言すれば、Fig.8 に示す固有ベクトル分布も 1024 種類存在する。ウェーブレット変換の 5 レベルに比較して極めて多い。

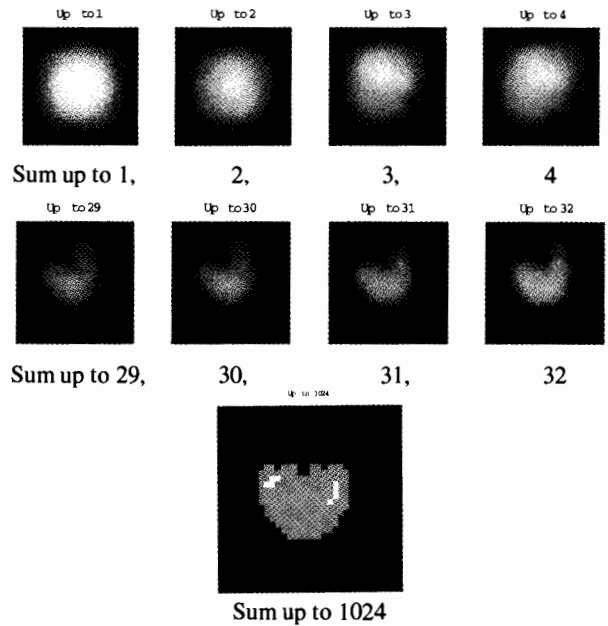


Fig. 9 Recovering process of the sample image by modal analysis

Fig. 9 はモーダル解析法によるサンプル画像の再構成過程を示す。固有値の絶対値が小さい固有ベクトルが生成する画像が明らかに全体的、すなわち、空間周波数の低い画像成分を構成する。これは、ウェーブレット変換の低レベルの画像と全く同じ傾向である。(30)式に従って、全ての固有ベクトルの重み付加算は原画像を厳密に再現することがわかる。

3. 結言

本稿では、離散値系ウェーブレット変換が一定の条件を負わせた重み付ソーティングの 1 種であることを述べた。また、ウェーブレット変換行列は、離散化法に依存しないモーダル行列と同じ性質をもつことを述べた。

尚、モーダル行列の性質は古典的な場の理論でよく知られている事実であるが、たまたまウェーブレット変換との関係に気が付いたのは、大学院の輪講で遠藤久君の発表を通してである。遠藤久君へ謝意を付記しておく。

参考文献

- 1) 斎藤兆吉: Mathematica によるウェーブレット変換, 朝倉書店, (1997).
- 2) 斎藤兆吉: ウェーブレット変換の基礎と応用, 朝倉書店, (1998).
- 3) 遠藤, 早野, 齋藤, 國井: ウェーブレット変換法と微積分方程式によるカラー画像の圧縮および再現性について, 1999 年度可視化情報学会 OS-205
- 4) 遠藤, 早野, 齋藤, 國井: 画像処理の一方法とその動磁界解析への応用, 電気学会論文誌 A 掲載予定