

# 可飽和インダクタンスを含む回路解析に関する考察

遠藤 久\*, 早野 誠治, 斎藤 兆古 (法政大学)

Consideration on Electric Circuit Analysis Including Saturable Inductance  
Hisashi Endo, Seiji Hayano and Yoshifuru Saito (Hosei University)

## Abstract

This paper studies a typical ferroresonance circuit to visualize a regularity of nonlinear systems. At first, a Chua type magnetization model is reviewed along with the electric circuits including saturable inductor, leading to a state variable equation consisting of the nonlinear parameters; permeability  $\mu$ , reversible permeability  $\mu_r$ , and hysteresis parameter  $s$ . Second, we employ the iterative backward Euler method for the transient analysis of this initial value problems. The characteristic values of the state transition matrix are calculated in each of iteration steps as well. Finally, it is clarified that the characteristic values trace on the same loci although during the chaotic phenomenon exhibiting.

キーワード: Chua 型磁化特性モデル, 非線形計算, 鉄共振回路

(Chua type magnetization model, nonlinear calculation, ferroresonance circuit)

## 1. まえがき

スイッチング電源をはじめとしたパワーエレクトロニクス技術は、電力利用を効率化したのみならず、電気機器の小型軽量、高性能化に拍車をかけた。電気機器の高度な小型・軽量化に、磁氣的結合または磁性材料の特性を積極的に利用した多彩な機能を有する電気機器が数多く開発され、実用化されている。他方、磁性材料の磁気飽和、ヒステリシス、さらに渦電流等の影響により、磁性材料を用いた電気機器は予測不可能な複雑なシステム応答を示す場合もある。したがって、磁性材料を含む電磁界の非線形解析は、高度化する電気機器の設計に不可欠であり、予測し難いシステム応答の解明に重要な役割を果たす。このような現状に対し、近年のパーソナルコンピュータの演算速度は目覚しく、比較的大規模な有限要素解析、非線形解析をも手軽に遂行可能としつつある[1-5]。

磁気ヒステリシスを表現するために様々な磁化特性モデルが提案されているが[6,7]、その大半は磁性材料によって影響を受ける物理量の出力を補正することに帰着している[8,9]。磁性材料を含む電磁界解析のキーは、材料の特性を表現する磁化特性モデル、すなわち構成方程式を導出し、Maxwell の方程式を解くことに帰する。以前から早野・斎藤らが提案する Chua 型磁化特性モデルは[10,11]、L. O. Chua が提案した磁気ヒステリシスモデル [12] を発展させ、駆動周波数や過去の履歴に依存しない構成方程式を導いた。Chua 型磁化特性モデルは異方性材料や物理的加重に対する適用が試みられてないが、強磁性体特有の現象であるヒステリシス、磁気余効、鉄共振現象などのシミュレーションおよ

びその実験的検証に成功し、電気機器設計に有用な鉄損、周波数特性、表皮深さに関する報告がされてきた[13-18]。さらに、他の代表的磁化特性モデルとの関係も明らかにしている[6,19,20]。

本論文では、Chua 型磁化特性モデルを用いて磁性材料を含む電気回路、特に定電流源として用いられる直列鉄共振回路のカオス現象に関して報告する。Chua 型磁化特性モデルの構成方程式より導出される回路方程式を状態変数法で表現し、後方オイラー法を用いて過渡解析を行う。同時に状態遷移行列の固有値を時間刻み幅毎に計算し、固有値の時間推移を考察する。その結果、回路がヒステリシスやカオス現象を呈示しているにも拘らず、状態遷移行列の固有値は規則的で履歴に依存しないことが判明した。以上より、過去の履歴に依存しないパラメータ測定とそれらを用いた解析がヒステリシス、非線形計算において、最初に解決されるべき最重要課題であることを述べる。

## 2. 磁性材料を含む電気回路の数値解析

### <2.1> 基礎方程式

Chua 型磁化特性モデルの構成方程式は、静的な磁区状態を表す(1)式と動的な磁区状態を表す(2)式の和、(3)式で表現される。

$$H_s = \frac{1}{\mu} B \quad (1)$$

$$H_d = \frac{1}{s} \left( \frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt} \right) \quad (2)$$

$$H = H_s + H_d = \frac{1}{\mu} B + \frac{1}{s} \left( \frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt} \right) \quad (3)$$

ここで、 $H, B$  はそれぞれ磁界の強さ[A/m]と磁束密度[T]を表す。さらに、 $\mu, \mu_r, s$  は Chua 型磁化特性モデルのパラメタであり、それぞれ透磁率[H/m], 可逆透磁率[H/m], ヒステリシス係数[Ω·m]である。(3)式における3パラメタは、過去の履歴や駆動周波数に依存しない方法で導出、測定されることが大きな特徴である。

### <2.2> パラメタ

磁化特性のモデルは、磁気履歴を表現しようとするものであり、モデルを構成するパラメタが過去の履歴に依存するようなものであってはならない。図1-3は本論文で用いるパラメタ  $\mu, \mu_r, s$  を与える曲線(実験値)である。

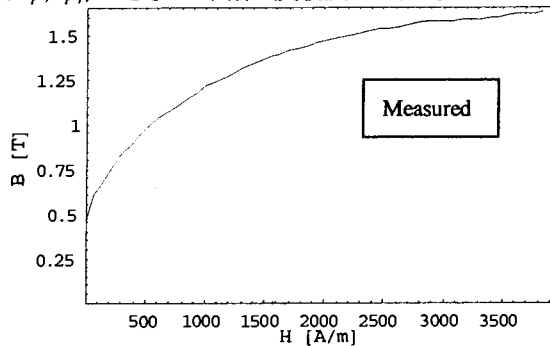


図1 透磁率  $\mu$  を与える曲線 (軟鉄)

Fig. 1 Magnetization curve giving permeability  $\mu$  (soft iron)

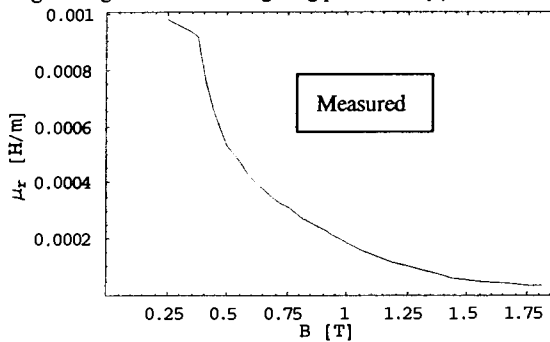


図2 可逆透磁率  $\mu_r$  を与える曲線 (軟鉄)

Fig. 2 Reversible permeability  $\mu_r$  (soft iron)

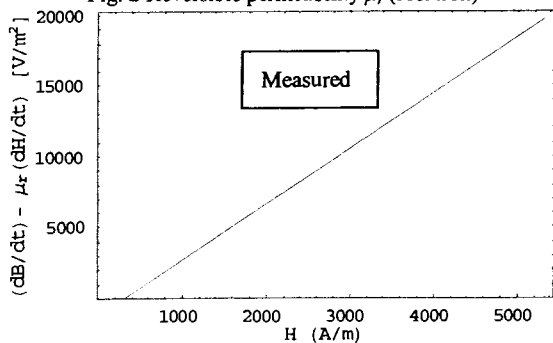


図3 ヒステリシス係数  $s$  を与える曲線 (軟鉄)

Fig. 3 Hysteresis parameter  $s$  (soft iron)

透磁率  $\mu$  は各点において交流消磁をして得られる理想磁化曲線を採用する。飽和値に達する周期的磁化状態のヒステリシスループにおいて、同一磁束密度における上昇曲線と下降曲線それぞれの磁界の平均値をトレースすると理想磁化曲線が得られることが知られている[21]。この理想磁化曲線は過去の履歴に無関係であるため、静的な磁区状態を表す(1)式のパラメタとなる。

可逆透磁率  $\mu_r$  もまた、過去の履歴に依存しないパラメタでなければならない。よって、過去の履歴に無関係である理想磁化曲線測定時におけるマイナーループ、すなわち理想磁化曲線測定時に得られる増分透磁率を用いる。その場合、マイナーループを得るための励磁周波数は必然的に高くなり渦電流や表皮効果の影響が懸念される。したがって、可逆透磁率も極低周波の励磁電圧を用いて測定する必要がある。

ヒステリシス係数  $s$  は磁束密度  $B=0$  時のサーチコイル誘起電圧より  $dB/dt$  と電流波形より  $dH/dt$  を求めることで決定できる。磁束密度  $B=0$  時の磁界  $H$  は、保磁力  $H_c$  に対応するから(3)式よりヒステリシス係数  $s$  は、

$$s = \frac{1}{H_c} \left( \frac{dB}{dt} - \mu_r \frac{dH}{dt} \right) \quad (4)$$

となる。結果として、励磁電圧を変化させ、磁束密度  $B=0$  時の  $dB/dt$  と  $dH/dt$  より、ヒステリシス係数  $s$  が求まる。また、可逆透磁率  $\mu_r$  は  $B=0$  のとき最大となるためヒステリシス係数を求めるときに使用する値は最大可逆透磁率である。

### <2.3> 非線形計算におけるパラメタの取り扱い

Chua 型磁化特性モデルにおける非線形計算は、非線形のパラメタ  $\mu, \mu_r, s$  をある関数で取り扱うことを意味する。すなわち、パラメタの性質より、 $\mu, \mu_r$  は磁束密度  $B$  の関数。 $s$  は  $dB/dt$  の関数として取り扱う。

### <2.4> R-L 直列回路の計算例

具体的な電気回路の計算例として、図4に示す可飽和トロイダルコアを含む R-L 直列回路の過渡現象を考える。

(3)式の構成方程式をトロイダルコアの磁路  $l$  に沿って線積分することで、電流  $i$  と磁束  $\phi$  の関係式(5)を得る。

$$Ni + \frac{\mu_r}{s} N \frac{di}{dt} = \frac{l}{\mu A} \phi + \frac{l}{sA} \frac{d\phi}{dt} \quad (5)$$

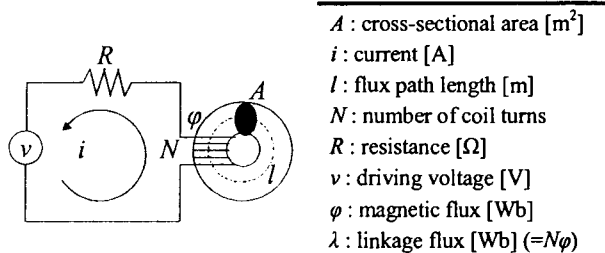


図4 可飽和インダクタンスを含む R-L 直列回路  
Fig. 4 R-L series circuit including saturable inductance

さらに、図4の回路より電流*i*と電圧源*v*の関係

$$i = \frac{1}{R} \left( v - N \frac{d\phi}{dt} \right) \quad (6)$$

を(5)式に代入し、鎖交磁束 $\lambda (=N\phi)$ に関する2階微分方程式

$$\frac{\mu_r}{s} \frac{d^2 \lambda}{dt^2} + \left( 1 + \frac{lR}{sAN^2} \right) \frac{d\lambda}{dt} + \frac{lR}{\mu AN^2} \lambda = \frac{\mu_r}{s} \frac{dv}{dt} + v \quad (7)$$

を得る。図5,6はそれぞれメジャーループ、マイナーループの計算例である。表1は計算に用いた定数である。

表1 R-L回路の計算に用いた定数

Table 1 Constants for calculation of R-L circuit

$\mu$ : permeability [H/m]	Fig. 1
$\mu_r$ : reversible permeability [H/m]	Fig. 2
$s$ : hysteresis parameter [ $\Omega \cdot m$ ]	Fig. 3
$A$ : cross-sectional area [ $m^2$ ]	$48.6 \times 10^{-6}$
$l$ : flux path length [m]	$78.3 \times 10^{-3}$
$N$ : number of coil turns	180
$R$ : resistance [ $\Omega$ ]	1.0
$\varepsilon$ : limit of discrepancy	$1.0 \times 10^{-5}$

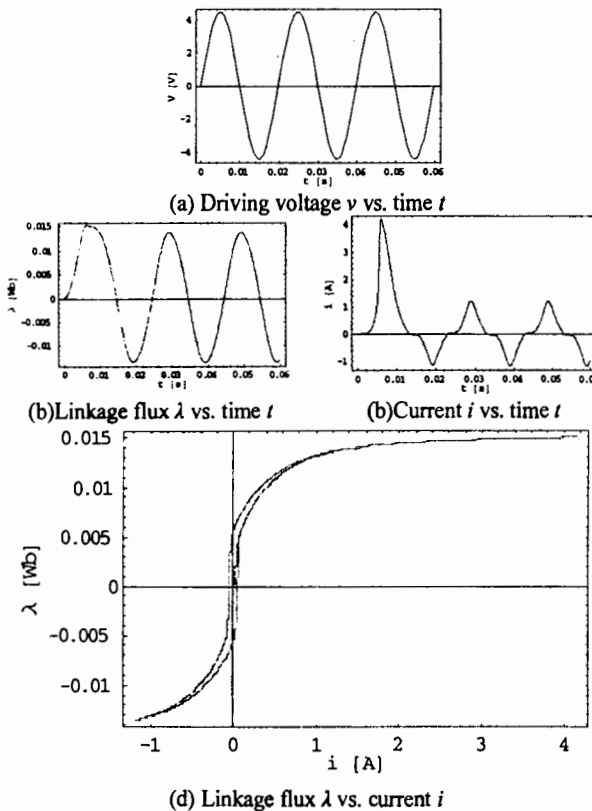


図5 メジャーループの計算例

Fig. 5 An example of major loop calculation

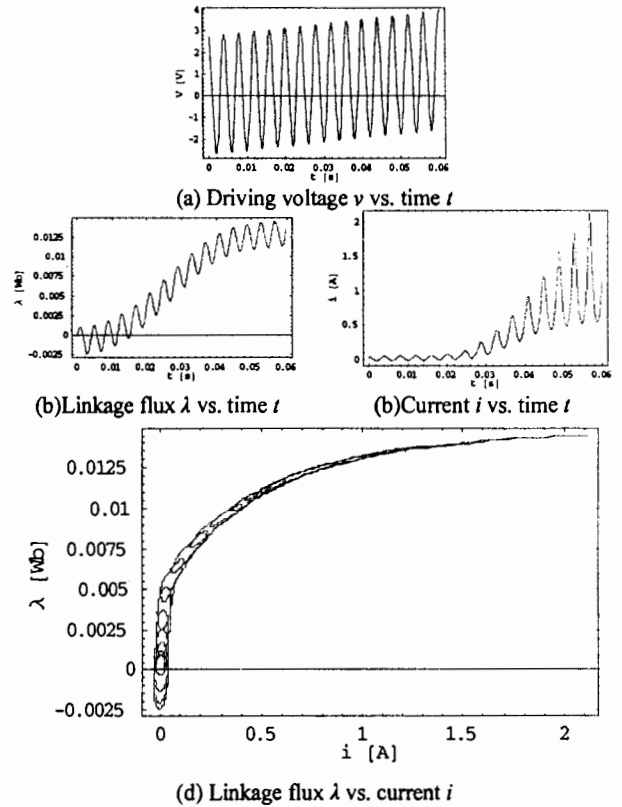


図6 マイナーループの計算例

Fig. 6 An example of minor loop calculation

### 3. 鉄共振回路のカオス現象

#### <3.1> 鉄共振回路の定式化

鉄共振回路は、図7のようにヒステリシスを呈する磁性材料を含むR-L-C回路である。電源電圧一定で周波数を徐々に変化させていくとある周波数で急激に電流が増加し共振が始まる。共振の状態から周波数を変化させても直ちに共振は終了しない。また、電源電圧を徐々に変化させた場合でも同様の現象が起こる。Chua型磁化特性モデルを用いて鉄共振現象を解析する。

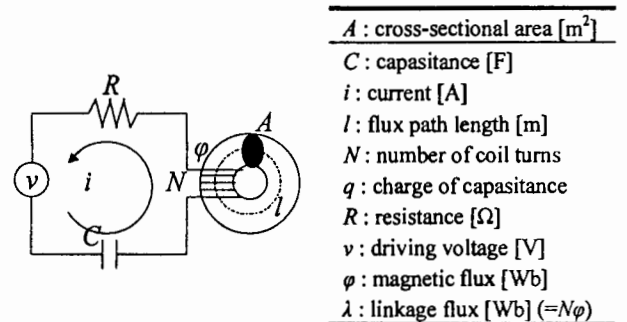


図7 直列鉄共振回路

Fig. 7 Series ferroresonance circuit

- $A$ : cross-sectional area [ $m^2$ ]
- $C$ : capacitance [F]
- $i$ : current [A]
- $l$ : flux path length [m]
- $N$ : number of coil turns
- $q$ : charge of capacitance
- $R$ : resistance [ $\Omega$ ]
- $v$ : driving voltage [V]
- $\phi$ : magnetic flux [Wb]
- $\lambda$ : linkage flux [Wb] ( $=N\phi$ )

図7に示す回路より電流  $i$  と電圧源  $v$  およびコンデンサに蓄積される電荷  $q$  の関係は(8)式で与えられる。

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{R} \left( v - \frac{q}{C} - N \frac{d\phi}{dt} \right) \quad (8)$$

(8)式を電流  $i$  と磁束  $\phi$  の関係式である(5)式に代入し、解くべき連立微分方程式(9), (10)式を得る。

$$\frac{\mu_r}{s} \frac{d^2 \lambda}{dt^2} + \left( 1 + \frac{IR}{sAN^2} - \frac{\mu_r}{sRC} \right) \frac{d\lambda}{dt} + \frac{IR}{\mu AN^2} \lambda = \frac{\mu_r}{s} \frac{dv}{dt} + \left( 1 - \frac{\mu_r}{sRC} \right) v \quad (9)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} - \frac{q}{C} + \frac{v}{R} \quad (10)$$

(9), (10)式を状態変数法で記述すれば、1階連立微分方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \lambda \\ \dot{\lambda} \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \dot{\lambda} \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (11)$$

あるいは、

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{a}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad (12)$$

を得る。(12)式を後方オイラー法で離散化し、鉄共振回路の過渡現象を計算する[22]。

### <3.2> 計算結果

表2に示す定数を用いて直列鉄共振回路の過渡解析をおこなった。ここでコンデンサ容量  $C$  の決定法であるが、鉄共振現象は  $LC$  共振に基づいているから、共振する条件を勘案しなければならない。本論文においては、以下の手順でコンデンサ容量  $C$  を決定した。

- 1) 飽和領域に入る直前周辺の透磁率  $\mu$  を選び、
- 2) 線形回路におけるインダクタンス  $L$  を仮に決める。
- 3) 共振条件と励磁周波数からコンデンサ容量を決める。

図8-10はそれぞれ入力となる駆動電圧  $v$ 、計算結果の鎖交磁束  $\lambda$  と電流  $i$  の時間波形である。図8の駆動電圧は、周波数70Hzで励振を始め、周波数を徐々に減少させる。その後、鉄共振現象が始まる  $t=0.29$  sで33 Hz固定としたものである。図9, 10より  $t=0.29$  s付近で急激に電流が増加し、持続する典型的な鉄共振現象が観察される。

### <3.3> 電流のカオス性

図11は鉄共振回路の過渡解析結果を用いて、縦軸に電流の時間微分値  $di/dt$ 、横軸に電流  $i$  をプロットしたものである。図11(b)より、周波数一定で駆動している  $t=0.29$  s以降においても、 $di/dt$  対  $i$  の関係は一定の軌跡を通らない。これは、鉄共振現象がカオス的振る舞いを呈することを明らかにしたのみならず、Chua型磁化特性モデルから導かれた微分方程式を用いて、カオス現象が表現可能であること意味する。

表2 鉄共振回路の計算に用いた定数

Table 2 Constants for calculation of ferroresonance circuit

$\mu$ : permeability [H/m]	Fig. 1
$\mu_r$ : reversible permeability [H/m]	Fig. 2
$s$ : hysteresis parameter [ $\Omega \cdot m$ ]	Fig. 3
$A$ : cross-sectional area [ $m^2$ ]	$48.6 \times 10^{-6}$
$C$ : capacitance [F]	$22.5 \times 10^{-6}$
$l$ : flux path length [m]	$78.3 \times 10^{-3}$
$N$ : number of coil turns	180
$R$ : resistance [ $\Omega$ ]	1.0
$\varepsilon$ : limit of discrepancy	$1.0 \times 10^{-5}$

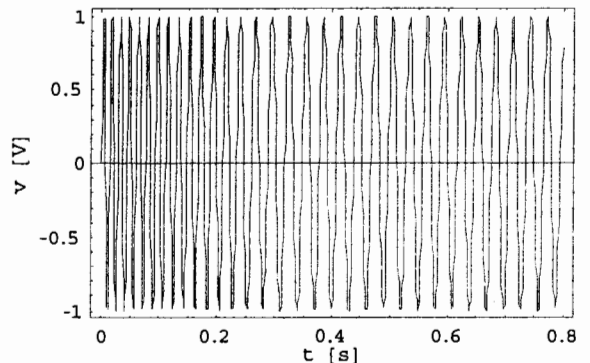


図8 入力電圧  $v$

Fig. 8 Driving voltage. Frequency is decreased from 70 to 33 Hz until  $t=0.29$  s., then fixed.

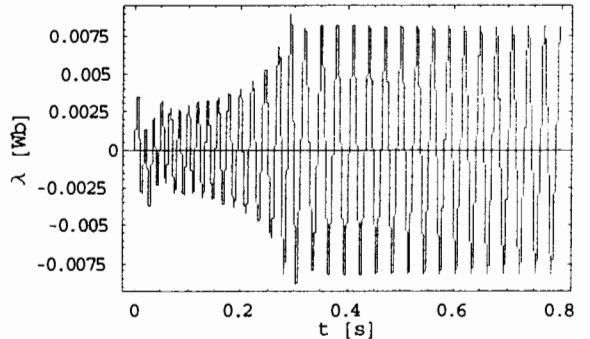


図9 鎖交磁束  $\lambda$  (計算値)

Fig.9 Calculated linkage flux  $\lambda$  vs. time  $t$

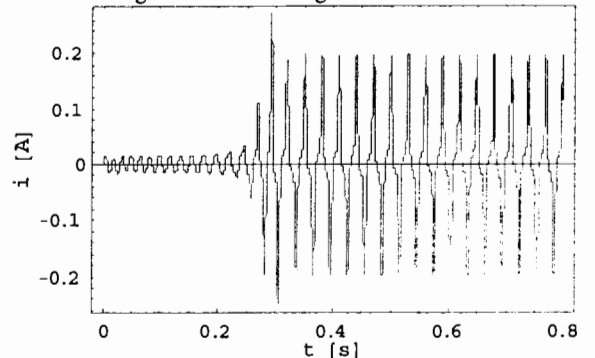
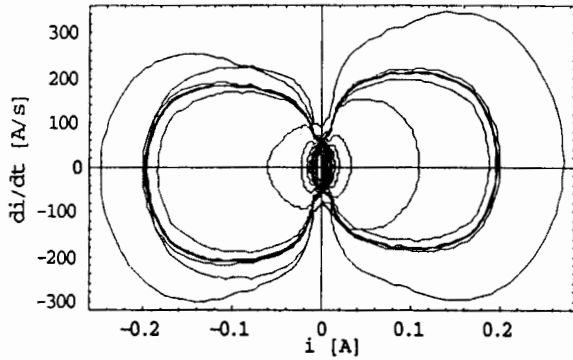
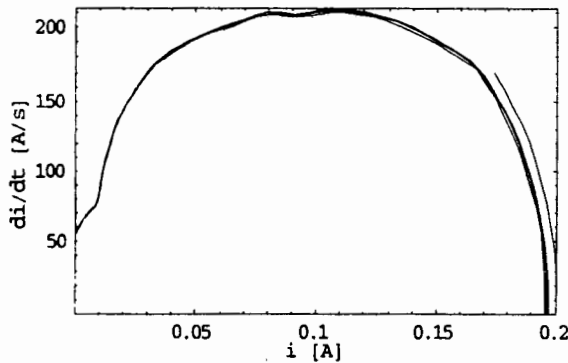


図10 電流  $i$  (計算値)

Fig.10 Calculated current  $i$  vs. time  $t$



(a)  $t=0.0 \sim 0.8$  s



(b) Magnified:  $t=0.35 \sim 0.5$  s

図11  $di/dt$  対  $i$  の軌跡

Fig. 11 Trajectory of  $di/dt$  vs.  $i$  exhibiting a chaotic behavior

### <3.4> システムの状態遷移特性

鉄共振回路のシステムの状態遷移特性を考察するため、(12)式における状態遷移行列  $a$  の固有値を時間刻み幅毎に計算し、時間軸を共通軸とする 3 次元可視化結果を図 12 に示

す。状態変数方程式やその固有値は、本来、線形な系にのみ適用できる概念である。本論文では、固有値解析法を非線形な系に対して区間線形化近似を行って適用し、系の推移を考察する。(12)式の行列  $a$  は 3 行 3 列の正方行列であるから各時間で 3 個の固有値をもつ。

図 12 から、鉄共振回路の全ての固有値は、常に左半平面に存在し、その中の 1 個は、負の実数、すなわち減衰項に対する極、残り 2 個は、互いに共役である複素数、すなわち減衰振動に対する極が導出され、絶対安定なシステムであることが判る。また、いずれの固有値も共振・非共振モードに関係なく、一定の軌道のみたどることが判る。これは、状態遷移行列が過去の履歴に依存せず、磁束密度  $B$  とその時間微分値  $dB/dt$  の関数として与えられるためである。したがって、カオス現象を喚起するのは、(9)式右辺の入力電圧に関する項となる。(9)式右辺の中でパラメタは、 $\mu_n s$  であるが、 $\mu/s$  は保持力  $H_c$  に関する[10,19]。よって、保持力の相違いがカオス的な状態を喚起すると考えられる。

### 4. まとめ

本論文では、Chua 型磁化特性モデルを用いて直列鉄共振回路の過渡解析を行い、鉄共振現象に付随するカオス現象に関して報告した。非線形計算の時間刻み幅毎に計算される状態遷移行列の固有値の時間推移を 3 次元的に可視化した。その結果、回路はヒステリシスやカオス現象を呈している間も状態遷移行列の固有値は履歴依存性が無いことが判明した。これは、Chua 型磁化特性モデルが過去の履歴に依存しないパラメタを用いることに起因している。これは、予測が困難な現象を呈する磁性材料を含む系の解析にはこのような過去の履歴に依存しないパラメタを用いなければならないことを示唆している。

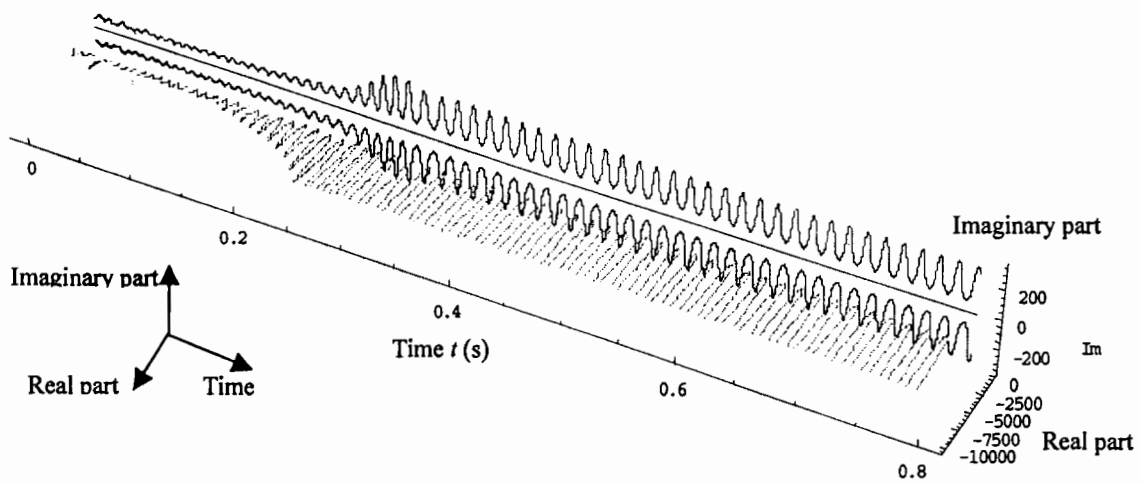


図12 状態遷移行列  $a$  の固有値の時間推移

Fig. 12 Changes of the characteristic values derived from the state transition matrix  $a$

参考文献

- [1] K. Tajima, O. Ichinokura, and Y. Sakamoto: "Analysis of a Parametric Induction Motor Using Reluctance Network Model -Third Report-", IEEJapan Magnetics Meeting, MAG-01-235 (2001-12) (in Japanese)  
田島克文・一ノ倉理・坂本禎智:「RNA法を適応したパラメトリックモータの動作解析—その3—」, 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-01-235 (2001-12)
- [2] K. Fukushima, M. Iwahara, and S. Yamada: "Numerical Simulation of a Reactor Taking into Account the Hysteresis, Eddy Current and Gap Effects", Journal of the Magnetics Society of Japan, Vol. 24, No. 4-2, pp.823-826 (2000-4) (in Japanese)  
福島健太郎・岩原正吉・山田外史:「磁心損失・空隙を考慮した環状磁心のシミュレーション」, 日本応用磁気学会誌, 24, 4-2, pp.823-826 (2000-4)
- [3] T. Adachi, and K. Fujiwara: "A Method for Nonlinear Magnetic Field Analysis Taking Account of the 2-D Magnetization Property -Factors Affecting Accuracy of Analysis and Convergence Characteristics-", IEEJapan Magnetics Meeting, MAG-01-228 (2001-12) (in Japanese)  
阿達孝之・藤原耕二:「二次元磁化特性を考慮した非線形磁界解析法—解析精度および収束特性に影響する諸因子の検討—」, 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-01-228 (2001-12)
- [4] M. Enokizono and H. Amano: "Examination of the High Accuracy of E&S Modeling", Journal of the Magnetics Society of Japan, Vol.25, No.4-2, pp.1107-1110 (2001-4) (in Japanese)  
榎園正人・天野寿人:「E&Sモデリングの高精度化の検討」, 日本応用磁気学会誌, 25, 4-2, pp.1107-1110 (2001-4)
- [5] N. Kobayashi, S. Hayano, and Y. Saito: "Transient Analysis of Fly-Back Type Switching Power Supplier -Analysis Taking into Account the Magnetic Hysteresis Loops-", IEEJapan Magnetics Meeting, RM-97-150 (1997-11) (in Japanese)  
小林宣之・早野誠治・斎藤兆古:「フライバック型スイッチング電源の過渡解析—磁気ヒステリシスを導入した解析—」, 電気学会マグネティックス研究会資料, RM-97-150 (1997-11)
- [6] F. Priesach: "Über die magnetische nachwirkung", Zeitschrift für Physik, Vol.94, No.5-6, pp.277- (1935-2) (in German)
- [7] Ivanyi: Hysteresis Models in Electromagnetic Computation, Akademiai Kiado, Budapest (1997)
- [8] I. D. Mayergoyz: Mathematical Models of Hysteresis, Springer-Verlag, NY (1991)
- [9] E. Della Torre: Magnetic Hysteresis, IEEE Press, NJ (1991)
- [10] 早野誠治:「磁性材料の構成方程式に関する研究」, 法政大学学位論文 (1995-1)
- [11] Y. Saito, M. Namiki, and S. Hayano, "A Magnetization Model for Computational Magnetodynamics", J. Appl. Phys., Vol.69, No.8, pp.4614-4616 (1991-4)
- [12] L. O. Chua and K. A. Stromsmoe: "Lumped Circuit Models for Nonlinear Inductor Exhibiting Hysteresis Loops", IEEE Trans. Circuit Theory, Vol.CT-17, No.4, pp.564-574 (1970-11)
- [13] Y. Saito, H. Saotome, S. Hayano, and T. Yamamura: "Modeling of Hysteresis and Anisotropic Magnetic Field Problems", IEEE Trans. Magn., Vol.MAG-19, No.6, pp.2510-2513 (1983-11)
- [14] Y. Saito, S. Hayano, H. Nakamura, Y. Kishino, and N. Tsuya: "A Representation of Magnetic Hysteresis by Fourier Series", Journal of Magnetism and Magnetic Materials, North-Holland, Vol.54-57, pp.1613-1614 (1986-9)
- [15] Y. Saito, K. Fukushima, S. Hayano, and N. Tsuya: "Application of a Chua Type Model to the Loss and Skin Effect Calculations", IEEE Trans. Magn., Vol.MAG-23, No.5, pp. 3569-3571 (1987-9)
- [16] Y. Saito, S. Hayano, Y. Kishino, K. Fukushima, H. Nakamura, and N. Tsuya: "A Representation of Magnetic Aftereffect", IEEE Trans. Magn., Vol.MAG-22, No.5, pp.647-649 (1986-9)
- [17] Y. Saito, M. Namiki, and S. Hayano: "A Representation of Magnetization Characteristics and Its Application to the Ferroresonance Circuits", J. Appl. Phys., Vol.67, No.9, pp.4738-4740 (1990-5)
- [18] Y. Saito, S. Hayano, and N. Tsuya: "Experimental Verification of a Chua Type Magnetization Model", IEEE Trans. Magn., Vol.MAG-25, No.4, pp. 2968-2970 (1989-7)
- [19] Y. Saito, S. Hayano, and Y. Sakaki: "A Parameter Representing Eddy Current Loss of Soft Magnetic Materials and Its Constitutive Equation", J. Appl. Phys., Vol.64, No.10, pp.5684-5686 (1988-11)
- [20] M. L. Hodgedon: "Application of a Theory of Ferromagnetic Hysteresis", IEEE Trans. Magn., Vol.MAG-24, No.5, pp.2638-2640 (1987-9)
- [21] R. M. Bozorth: "Ferromagnetism", Van Nostrand, Princeton, NJ (1951)
- [22] R. S. Varger: Matrix Iterative Analysis, Prentice-Hall, NJ (1962)

原稿受付日

平成 14 年 10 月 22 日