

## 線形システムのウェーブレット解析と零追加法

○中島賢<sup>1)</sup>、早野誠治<sup>2)</sup>、斎藤兆古<sup>3)</sup> (法政大学 工学部<sup>4)</sup>)

Wavelets Analysis of Linear System and Zero addition Method

Ken Nakajima, Seiji Hayano and Yoshifuru Saito  
College of Engineering, Hosei University

### Abstract

Previously, we have proposed a wavelets analysis solving for the magnetic field source searching problems. However it was encountered a serious problem that yielded the spiky errors of the wavelets solution. In order to remove these spiky errors, we propose a zero addition method. Numerical and practical examples demonstrate the usefulness of our approach.

### 1. はじめに

超電導量子干渉素子(SQUID)の発達とともに、脳機能によって生じる脳周辺の磁界を測定することが可能になっている。人間の脳機能を明らかにするために、局所的に測定された磁界から磁界源探査をすることは極めて重要である。このことは、不適切な線形システム方程式を解くことに帰する。不適切な線形システムとは逆行列を持たないシステムを意味し、システム行列の行列式の値がゼロになる場合と行と列の数が一致しない長方形の場合に大別できる。不適切問題を解くさまざまな数値解析法が提案されている。生体磁気学において最小2乗法や最小ノルム法が広く用いられている<sup>(1-6)</sup>。前者は、もっとも支配的で単一の磁界源、いわゆる電流双極子を探査することに応用される。後者は、磁界源となる電流分布を推定するために用いられる<sup>(7,8)</sup>。

筆者等は、従来から不適切な線形システム方程式を近似的に解く方法としてウェーブレット解析法を提案してきている<sup>(1-3,11-16)</sup>。この解析法のキーアイデアは、2次元ウェーブレット変換をシステム行列に適用し、システム行列の最も支配的な要素を集めることによって、ウェーブレットスペクトラム領域で近似逆行列を得る点にある。

しかしながら、不適切な線形システムのウェーブレット解析法の問題点として、ウェーブレット変換の高次基底を用いた場合、低次の2次基底(ハール基底)と異なり、解の両端にスパイク状の誤差を生ずる。この誤差を低減することが、本論文の検討課題である。

本稿では、この問題を解決するためにゼロ追加法を提案する<sup>(10)</sup>。ウェーブレット変換はデータの周期性を仮定している。このため非周期性のデータに対

<sup>1)</sup> 大学院修士課程 <sup>2)</sup> 電気電子工学科 助教授 <sup>3)</sup> 電気電子工学科 教授  
<sup>4)</sup> 〒184-8584 東京都小金井市梶野町3-7-2 Tel&Fax 042-387-6200

してデータ圧縮を行った場合、データの端部でスパイク状の誤差が発生する。この誤差を低減するために元データにゼロを追加し周期性のある波形に変形してデータ圧縮を行う解析法、すなわち、ゼロ追加法がある。本論文はこのゼロ追加法の原理を不適切な線形システムの近似解析へ適用する。

具体例としてフィルム状導体中における電流分布を離散値系ウェーブレット変換を用いて磁界測定から推定する。その結果、ゼロ追加法によって解精度が改善され、実験値と計算値は比較的良好な一致をすることが判明したのでここに報告する。

## 2. 基礎方程式

磁界を  $H$ 、電流密度を  $J$  とすれば、両者の関係は、

$$H = \int_V G' J dv \quad (1)$$

の形式で書ける。但し、 $G'$  はグリーン関数の空間微分であり、 $V$  は電流密度  $J$  が存在する領域の体積である。

いま、(1)式で、微小体積  $\Delta v$  中の電流密度  $J$  が一定値、 $\Delta v$  の中心から  $H$  までの  $G'$  が一定値と見なすことができるとすれば、(1)式は(2)式のように離散化できる。

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}\mathbf{Y} \quad (2)$$

ここで、ベクトル  $\mathbf{X}$ 、 $\mathbf{Y}$  そしてシステム行列  $\mathbf{D}$  はそれぞれ、 $n$  を磁界の測定点数、 $m$  を微小体積数として、

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= [H_1 \ H_2 \ \dots \ H_n]^T \\ \mathbf{Y} &= [\Delta v J_1 \ \Delta v J_2 \ \dots \ \Delta v J_m]^T \\ &= [i_1 \ i_2 \ \dots \ i_m]^T, \quad i_j = \Delta v J_j, j=1,2,\dots,m \\ \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1m} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nm} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

で与えられる。

## 3. ウェーブレット変換による近似解析

### 3.1 ウェーブレット変換

いま、 $n$ 、 $m$  次の離散値系ウェーブレット変換行列を、それぞれ、 $W_n$ 、 $W_m$  とすれば、(2)式をウェーブレット変換したシステムは

$$\begin{aligned} \mathbf{X}' &= \mathbf{D}\mathbf{Y} \\ \mathbf{X}' &= W_n \mathbf{X}, \quad \mathbf{Y}' = W_m \mathbf{Y}, \quad \mathbf{D}' = W_n \mathbf{D} W_m^T \end{aligned} \quad (4)$$

となる。

### 3.2 近似解

変換されたシステム行列  $\mathbf{D}'$  は、マザーウェーブレット ( $\mathbf{D}'$  の1行1列要素) 近傍にシステム全体の平均的情報と支配的情報が集中しているから、行列式の値が非ゼロとなる  $\mathbf{D}'$  の(1,1)から( $n'$ , $n'$ )までの正方部分行列  $d$  で  $\mathbf{D}'$  を近似する。従って、ウェーブレット空間における近似逆行列は

$$\mathbf{D}'_{Appro} = d^{-1} \quad (5)$$

で与えられる。ベクトル  $\mathbf{X}'$  もベクトルの第1要素から第  $n'$  要素までを  $\mathbf{X}'_{Appro}$  として近似する。スペクトラム解は

$$\mathbf{Y}'_{Appro} = \mathbf{D}'_{Appro}^{-1} \mathbf{X}'_{Appro} \quad (6)$$

となる。ウェーブレット逆変換可能な要素数(2のべき乗)に戻すために、 $\mathbf{Y}'_{Appro}$  に要素数( $m-n'$ )のゼロ列ベクトルを追加してウェーブレット逆変換を行う。すなわち、近似解  $\mathbf{Y}_{Appro}$  は

$$\mathbf{Y}_{Appro} = W_m^T \mathbf{Y}'_{Appro} \quad (7)$$

但し、

$$\mathbf{Y}''_{Appro} = [\mathbf{Y}'_{Appro}, 0, \dots, 0]^T$$

で与えられる。これがウェーブレット変換による逆問題解析の原理である。

## 4. フィルム導体中の電流分布推定

### 4.1 モデル

ここでは、図1に示すフィルム幅  $L_f$  に電流が流れていて、フィルムの上端  $\Delta Y$  の高さに、フィルムの左端から  $\Delta X$  右に平行移動した長さ  $L_m$  の線分に沿って、平行方向(フィルムの接線方向)の磁界が  $n$  点等間隔で測定されるとする。フィルムは  $m$  個に等間

隔で分割され、微小区間に集中された $m$ 個の電流を求めるシステムを考える。

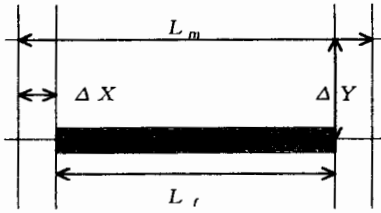


図1 シミュレーションモデル (フィルム状導体断面図)

#### 4.2 シミュレーション

フィルム幅 $L_f$ 、測定領域 $L_m$ 、 $\Delta X$ 、 $\Delta Y$ をそれぞれ、10、10、0、0.3[cm]、さらに $n=16$ 、 $m=32$ としてシステム行列を得る。但し、測定される磁界は測定面に平行な成分とする。システム行列 $D$ をドビッシーの8次基底を用いてウェーブレット変換した結果得られる $D'$ を図2に示す。

図2で、(1,1)から(16,16)の部分正方行列 $d$ の逆行列をガウスの消去法で求める場合の相対誤差<sup>(9)</sup>は $8.639 \times 10^{-14}\%$ であった。最終的に得られた推定解を図3に示す。

図3の(a)~(c)を比較してみると(c)は正解が得られ、(a)と(b)は左端にスパイク状の誤差を生じている。ウェーブレット変換は、データに対し周期性を仮定しているため、非周期性のデータに対してデータ圧縮を行った場合、再現データの端部にスパイク状の誤差が発生する。これを解決するために元データにゼロを追加し周期性のある波形に変形してデータ圧縮を行う解析法を適用する<sup>(10)</sup>。この提案によって解精度が改善されることを以下に述べる。

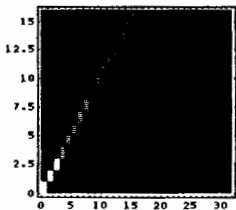


図2 システム行列 $D$ をウェーブレット変換して得られるスペクトラム行列 $D'$  (イメージ行列の淡い方と濃い方はそれぞれ大きな値と小さな値を示す)

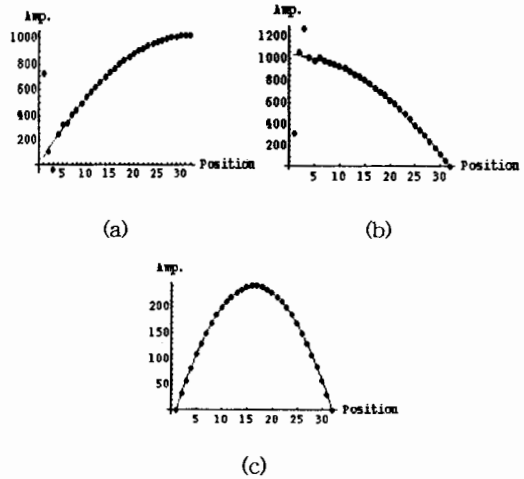


図3 フィルム中の電流分布推定解(点線:ウェーブレット変換を用いた推定解)と厳密解(実線); (a),(b),(c)それぞれフィルム上で右、左、中央部分に電流が偏った場合を示す。

#### 4.3 ゼロ追加法

解の改善法のキーポイントとして、解に零区間を持つ周期性をもたせることである。このため、システム行列 $D$ に2のべき乗となるように最小次数のゼロ要素を加える。

システム行列 $D$ の行の数は磁界の測定点数に相当し、列の数は推定電流個数に相当する。システム行列 $D$ の行と列の数の大きさを変えたときに、同様に磁界と電流の数も零を追加して変更する。

アルゴリズムは、行列のサイズが変化しただけであり、ウェーブレット変換による近似解法の原理と同様になる。

フィルム幅 $L_f$ 、測定領域 $L_m$ 、 $\Delta X$ 、 $\Delta Y$ を4.2節の例題と同様にそれぞれ、10、10、0、0.3[cm]、さらに $n=16$ 、 $m=28$ として得られるシステム行列の列成分にゼロを4列加えてこれをシステム行列とみなす。システム行列 $D$ をドビッシーの8次基底を用いてウェーブレット変換した結果得られる $D'$ を図4(a)に示す。

図4(a)で、(1,1)から(16,16)の部分正方行列 $d$ の逆行列をガウスの消去法で求める場合の相対誤差は $8.4 \times 10^{-8}\%$ であった。最終的に得られた推定解を図4(b)、(c)に示す。明らかに端部のスパイク状誤差が低減されている。

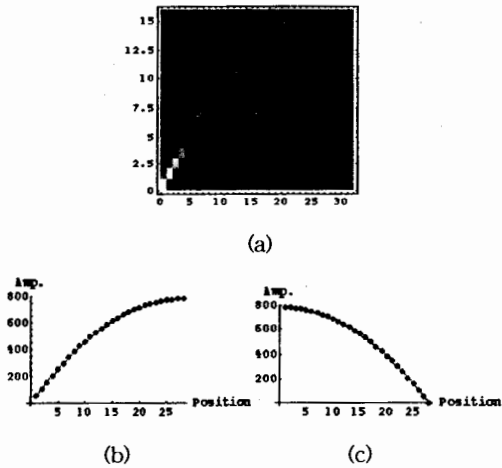


図4 ゼロ追加法による解精度の改善；(a)ウェーブレットスペクトラム行列、(b)と(c)ゼロ追加法を考慮したウェーブレット解による推定電流分布（点線）と厳密解（実線）の比較

## 5. 実験

実験ではフィルム導体中の電流を直接測定できないため、フィルム導体の代わりに0.4mmのホルマル線を28本平行に図5(a)に示すように並べ、各ホルマル線の電流を直接測定した。

フィルム幅、測定領域の区間、 $\Delta X$ 、 $\Delta Y$ をそれぞれ、7.0、7.0、0、0.3[cm]、さらに $n=16$ 、 $m=28$ とした。最終的に得られた計算値と実験値の比較を図5(b)(c)に示す。ゼロ追加法を考慮して得られる解は実験値と良好な一致を示している。

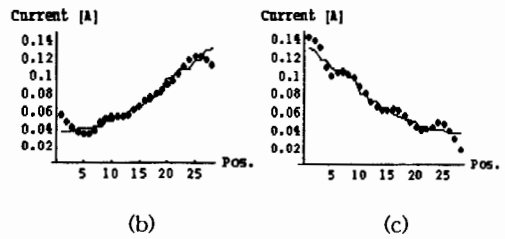
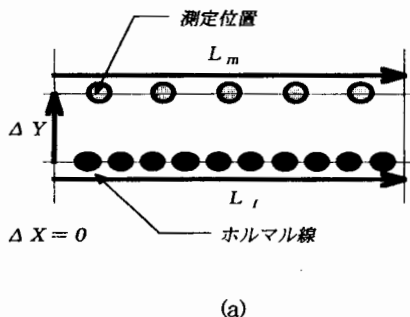


図5 (a)実験装置の概略図、(b)と(c)推定電流分布（点線:ウェーブレット解析解）と平行導線の電流値（実線:実験値）

## 6. まとめ

逆問題解析法の一方法としてウェーブレット変換を用いるアプローチを提案してきた。従来の方法は必ずしも良好な解を得られるとは限らなかった。本稿は解精度の改善法としてゼロ追加法を提案した。シミュレーションと実験で本方法の有用性を確認できた。

### 参考文献

- (1) 斎藤兆古, "Mathematicaによるウェーブレット変換" (朝倉書店 1996年9月)
- (2) 斎藤兆古, "ウェーブレット変換の基礎と応用" (朝倉書店 1998年4月)
- (3) Y.Saito, T.IEE of Japan, Vol.116-A, No.10 (1996)
- (4) T.Katila, et al., J.Appl.Phys.52,2526 (1981)
- (5) T.Katila, In.J.Appl.Electromagnetics in Materials, (1990) pp.179-187
- (6) J.Z.Wang, et al., IEEE Trans. Biomedical Engineering, Vol. BME-39, No.7, July (1992)
- (7) Y.Saito, et al., J.Appl.Phys., 67,9 (1990)
- (8) Y.Saito, T.IEE of Japan, Vol.114-A, No.6 (1994)
- (9) S.Keiper, "Elementary Numerical Computing with Mathematica", McGraw-Hill(1993)pp.146
- (10) K.Yoda and Y.Saito, "A Wavelet Transform Approach to Inverse Problems of Vandermonde Type Systems" IEEE Trans. Magn, Vol.33, No.2, pp1955-1957(1997)
- (11) T.Doi, et al., IEEE Trans. Vol.33, No.2, March (1997) pp.1935-1938
- (12) T.Doi, et al., IEEE Trans. Vol.33, No.2, March (1997) pp.1962-1965
- (13) 斎藤兆古, "不適切な線形システムのWavelet変換解析" 電気学会マグネティクス研究会資料 MAG-97-49
- (14) 中島, 他 電気学会回転機研究会資料 RM-97-146
- (15) 中島, 他 電気学会マグネティクス研究会資料 MAG-97-222
- (16) K.Nakajima et al., "Application of Wavelets Analysis to Magnetic Fields Source Searching" ISIP'98 Abstract, pp.283