

双対映像法による開領域電磁界計算

— 磁性体を含む系 —

Strategic Dual Image Method for Open Boundary
Electromagnetic Field Calculation

— Open Magnetic Field Containing the Ferromagnetic Material —

斎藤 兆古, 高橋 和彦, 早野 誠治.
Y.Saito, K.Takahashi and S.Hayano.

法政大学 工学部
College of Engineering, Hosei University

1. まえがき

筆者等は、開領域の電磁界分布を有限要素法で極めて容易に算定する方法として、双対映像法を提唱した[1-4]。その結果、従来開領域問題に対して適用することが困難であった有限要素法を用いて、開領域問題が解析可能であることを示した。しかし、双対映像法は電気映像法を拡張したものであるため、領域内に磁性体を含む問題に対して、従来の方法では、双対映像法を直接適用することは困難であった。このことから、本報告では、等価磁化電流密度の概念を用いることにより、双対映像法が強磁性体を含む開領域静磁界問題に適用可能であることを示し、従来不可能であった磁気飽和などの非線形材料を含む開領域問題が有限要素法によって解かれ得る可能性を提示する。

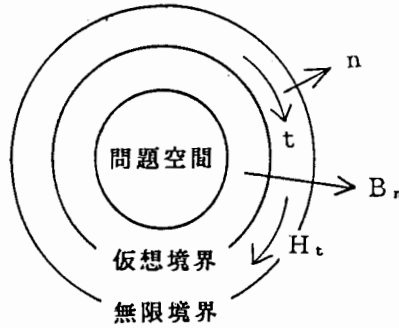
2. 双対映像法

2.1 仮定

双対映像法は、電流とその影像によって得られる磁界および磁荷とその影像によって得られる磁界との和によって開領域の磁界を表わす方法である。双対映像法は、以下に述べる幾つかの仮定を必要とする。

- (a) 磁界の源になる電流や磁荷の総和は、系全体として零である。この仮定は、多くの磁気装置で満足される仮定である。
- (b) 対象としている系は、無限遠点に位置する閉曲面の無限境界によって囲まれている。

- (c) 無限境界における境界条件は、境界における磁束密度の法線方向成分（以下 B_n ）と磁界の強さの接線方向成分（以下 H_t ）が零であるとする。
この仮定は、開領域の磁界が発散方向成分 B_n と回転方向成分 H_t からなることを意味する。
- (d) 実際の計算領域を囲む仮想境界は、第1図に示すように問題空間と無限境界の間に位置し、その大きさは任意である。仮想境界上では、磁界の発散方向成分 B_n と回転方向成分 H_t は独立に取り扱えるものとする。



第1図 無限境界と仮想境界。

2.2 原理

- ① 従来の開領域問題の無限遠点における境界条件は、無限遠点でポテンシャルが零となるとしていた。しかし、仮定(c)より、無限遠点に位置する無限境界で B_n と H_t が零になるとする。よって、無限境界の境界条件は次式となる。

$$B_n = 0, \quad (1)$$

$$H_t = 0. \quad (2)$$

- ② 仮想境界上において、 $B_n = 0$ になるような磁界源とその影像を考慮することによって、 $H_t \neq 0$ の磁界を作る。
- ③ 仮想境界上において、 $H_t = 0$ になるような磁界源とその影像を考慮することによって、 $B_n \neq 0$ の磁界を作る。
- ④ ②、③で作られた磁界を組み合わせることによって、無限境界での境界条件(1),(2)式を満足する磁界を得る。これが双対影像法の原理である。

2.3 仮想境界と境界条件

2.3.1 回転方向成分 H_t

問題空間において磁界源である任意の電流 i_p とその影像 $-(d/a)i_p$ を第2図に示すように想定する。このとき、第2図に示すように電流 i_p を取り囲む半径 a の円上で、ベクトルポテンシャル A は零となり、発散方向成分 B_n は零となる。他の電流に対しても半径 a と円の中心 O が共通になるように影像を想定す

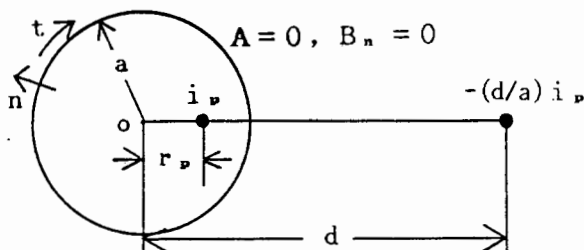
ることにより、中心Oで半径aの円は $B_n = 0$ を満足する仮想境界となる。このとき、仮想境界の外側で影像の総和が零になる条件はqを電流の数とすると、

$$\sum_{p=1}^q (d_p / a) i_p = a \sum_{p=1}^q (i_p / r_p) = 0, \quad (3)$$

である。ここで r_p は電流 i_p から円の中心Oまでの距離($r_p = a^2 / d_p$)である。(3)式の条件は、仮想境界の円の中心OでベクトルポテンシャルAが

$$A = 0, \quad (4)$$

となることを意味する。以上、仮想境界上で $B_n = 0$ で H_t のみの磁界を満足するベクトルポテンシャルAは、仮想境界上と中心Oで $A = 0$ の境界条件で支配方程式を解くことで得ることができる。



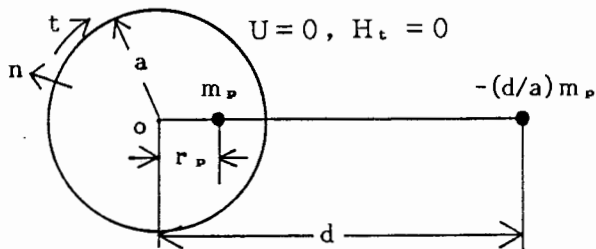
第2図 $B_n = 0$ の仮想境界。

2.3.2 発散方向成分 B_n

問題空間の磁界源が磁荷 m_p であるとみなし、その影像を第3図に示すように想定する。このとき半径aの円上では、スカラーポテンシャルUは零となる。従って、この半径aの円上において、磁界の回転方向成分 H_t は零になり、この条件をベクトルポテンシャルAで表わすと、

$$\partial A / \partial n = 0, \quad (5)$$

の対称条件になる。他の磁荷に対しても、半径aと円の中心Oが共通になるようにそれぞれの影像を想定すれば、この円は $H_t = 0$ を満足する仮想境界になる。仮想境界上において、 $H_t = 0$ で B_n のみの磁界を満足するベクトルポテンシャルAは、(3)式を満足し、仮想境界上で対称境界条件、中心Oで零境界条件で支配方程式を解くことで得られる。



第3図 $H_t = 0$ の仮想境界。

2.3.3 閉領域の磁界

仮想境界の中心と仮想境界上で零境界条件として得られた解を X_z とし、仮想境界の中心で零境界条件、仮想境界上で対称境界条件として得られた解を X_s とすると双対映像法による解 X は、

$$X = (1/2) (X_z + X_s), \quad (6)$$

で与えられる。(6) 式の $(1/2)$ は磁界源が重複するためのものである。

3. 磁性体を含む系

双対映像法は、磁界源とその映像を想定することによって、仮想境界上の境界条件を決め、結果的には閉領域問題を閉領域問題に置き換える方法である。これは、磁性体を含まない場合、つまり透磁率がすべての領域で等しい場合である。しかし系の中に磁性体が含まれる場合、映像の大きさが磁性体を含まない場合と等しくなく、この場合の映像の大きさを求めることは困難である。従って、2章で述べた理論をあてはめるためには、磁性体の透磁率の代わりに磁化の概念を用いることで、系の透磁率がすべての領域で等しくなり、双対映像法を磁性体を含む系に適用することが可能となる。

3.1 基礎方程式

磁界 H と電流密度 J_s の間には次の関係がある。

$$\nabla \times H = J_s. \quad (7)$$

また、磁性体では、磁束密度 B と磁界 H および磁化 M の間に次の関係がある。

$$B = \mu_0 H + M, \quad (8)$$

ここで、 μ_0 は真空中の透磁率であり、磁化 M は真空中では零である。

(8) 式は、透磁率 μ を用いることにより次式のように表わすこともできる。

$$B = \mu H. \quad (9)$$

磁束密度の発散は常に零であるから、ベクトルポテンシャル A を用いて、

$$B = \nabla \times A, \quad (10)$$

とすれば、 $\nabla \cdot B = 0$ の条件が自動的に満足される。

(7), (8), (10) 式から、

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{1}{\mu_0} \nabla \times A &= \nabla \times H + \nabla \times \frac{1}{\mu_0} M \\ &= J_s + J_i, \end{aligned} \quad (11)$$

の関係を得る。ここで、

$$J_i = \nabla \times \frac{1}{\mu_0} M, \quad (12)$$

は、磁性体中の等価磁化電流密度である。さらに、次式のクーロンゲージ、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (13)$$

を仮定すれば(11)式は、

$$-\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{J}_s - \mathbf{J}_i, \quad (14)$$

となる。また、(7),(9),(10),(13)式から(14)式は次のようにも書ける。

$$-\frac{1}{\mu} \nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{J}_s. \quad (15)$$

(14)式から(15)式を引き算すると、(12)式の等価磁化電流密度 \mathbf{J}_i は、

$$-\mathbf{J}_i = \frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{\mu} \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (16)$$

として表わされることになる。

3. 2 計算の実行

磁性体を含む系に双対映像法を適用するため、(14)式を仮想境界内で有限要素法によって離散化し、境界条件を仮想境界上とその中心で零としたシステム方程式を次式とする。

$$\mathbf{C}_z \mathbf{X}_z = \mathbf{F}. \quad (17)$$

(\mathbf{C}_z : 係数行列, \mathbf{X}_z : 解ベクトル, \mathbf{F} : 入力ベクトル)

\mathbf{F} は印加電流密度 \mathbf{J}_s と等価磁化電流密度 \mathbf{J}_i による入力ベクトルである。

境界条件を仮想境界の中心で零、仮想境界上で対称境界としたシステム方程式を次式とする。

$$\mathbf{C}_s \mathbf{X}_s = \mathbf{F}. \quad (18)$$

(\mathbf{C}_s : 係数行列, \mathbf{X}_s : 解ベクトル)

双対映像法による開領域を表わす解ベクトル \mathbf{X} は(6)式より、

$$\mathbf{X} = (1/2) (\mathbf{X}_z + \mathbf{X}_s), \quad (19)$$

である。仮想境界上において、(19)式の解ベクトル \mathbf{X} は、 $\mathbf{X}_z = 0$ が常に成り立つため次式となる。

$$\mathbf{X} = (1/2) \mathbf{X}_s. \quad (20)$$

(18)式を次式のように小行列に分解する。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

\mathbf{X}_1 : 仮想境界内部の解ベクトル

\mathbf{X}_2 : 仮想境界上の解ベクトル

(20)式の条件から(21)式の X_2 は、

$$X_2 = (1/2) [C_{22} - C_{21} C_{11}^{-1} C_{12}]^{-1} [F_2 - C_{21} C_{11}^{-1} F_1], \quad (22)$$

となり、従って X_1 は次式となる。

$$X_1 = C_{11}^{-1} [F_1 - C_{12} X_2]. \quad (23)$$

(22), (23)式から開領域のベクトル X は、(17), (18)式の両方を解かなくても得ることができる。

3. 3 等価磁化電流密度入力ベクトル

開領域の解ベクトル X は、(22), (23)式より求めることができた。これは、(18)式のシステム方程式から得られたものである。従って、(18)式について等価磁化電流密度を求める。(18)式の入力ベクトル F は(14)式から、印加電流密度 J_s による入力ベクトル F_s と等価磁化電流密度 J_i による入力ベクトル F_i の和からなる。

$$F = F_s + F_i. \quad (24)$$

(24)式の F_s は既知の値であるが、 F_i は仮想した等価磁化電流密度 J_i によるものであるため、未知数である。 F_i は、(16)式より次式となる。

$$F_i = (C_s - C_s') X. \quad (25)$$

ここで、 C_s' は(15)式の左辺を仮想境界上で対称境界条件、仮想境界の中心で零境界条件として有限要素法で離散化して得られた係数行列である。(25)式は磁性体中の有限要素法で離散化された節点に集中された等価磁化電流を表わすから、各節点に対応する面積で等価磁化電流を割り算することによって、(12)式の等価磁化電流密度 J_i を求めることができる。

3. 4 反復解法

3. 2節で、形式的に磁性体が含まれる系の開領域の磁界を求めたが、前節で述べたように、等価磁化電流密度による入力ベクトル F_i が解の関数であるため、解ベクトル X は反復的に求めることができる。

簡単のために、仮想境界上に入力ベクトルも磁性体も存在しないものとするれば、(21), (24), (25)式はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$F_1 = F_s + F_i, \quad (27)$$

$$F_i = (C_{11} - C_{11}') X_1. \quad (28)$$

ここで、 C_{11}' は(25)式の C_s' における X_1 に対応する係数行列である。

(27), (28) 式より (26) 式は,

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_s + (C_{11} - C_{11}') X_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

となり, (20) 式の条件から (29) 式の X_2 , X_1 は次式で表わすことができる。

$$X_2^{(n+1)} = -(1/2) [C_{22} - C_{21} C_{11}^{-1} C_{12}]^{-1} [C_{21} C_{11}^{-1} F_s + (C_{11} - C_{11}') X_1^{(n)}], \quad (30)$$

$$X_1^{(n+1)} = C_{11}^{-1} [F_s + (C_{11} - C_{11}') X_1^{(n)} - C_{12} X_2^{(n+1)}]. \quad (31)$$

ここで, 上添字 (n+1) と (n) は, 第 (n+1) および第 (n) 回目の反復を示す。そして第 (n) 回目と第 (n+1) 回目の値が一致するまで反復することによって, 解ベクトルを求めることができる。ここで, (28) 式の F_i を決定する出発値のベクトル $X_1^{(0)}$ の選び方によって, この反復解法による解は極めて早く収束する。それは, 次の例題において実際に数値実験を行なった結果, (22), (23) 式において, C_{11} を C_{11}' で置き換えて計算した結果を出発値として用いれば良いことがわかっている。

4. 例題

系の中に磁性体を含む開領域の静磁界問題を計算する。例題は二次元問題であり, 以下の項目について数値実験を行なう。

- (a) 磁性体を, 電流が流れている導体を取り囲んでいる場合。
- (b) 電流が流れている導体を, 磁性体を取り囲んでいる場合。
- (c) 磁性体中に電流が流れている場合。



第 4 (a) ~ (c) 図にそれぞれの計算結果を示す。解析対象領域は, それぞれの図のような境界条件より, 全体の 1/4 とした。仮想境界の半径を変えて計算した結果, その解が半径に依存せずユニークである。このことは, 双対映像法による計算結果の妥当性を示す。

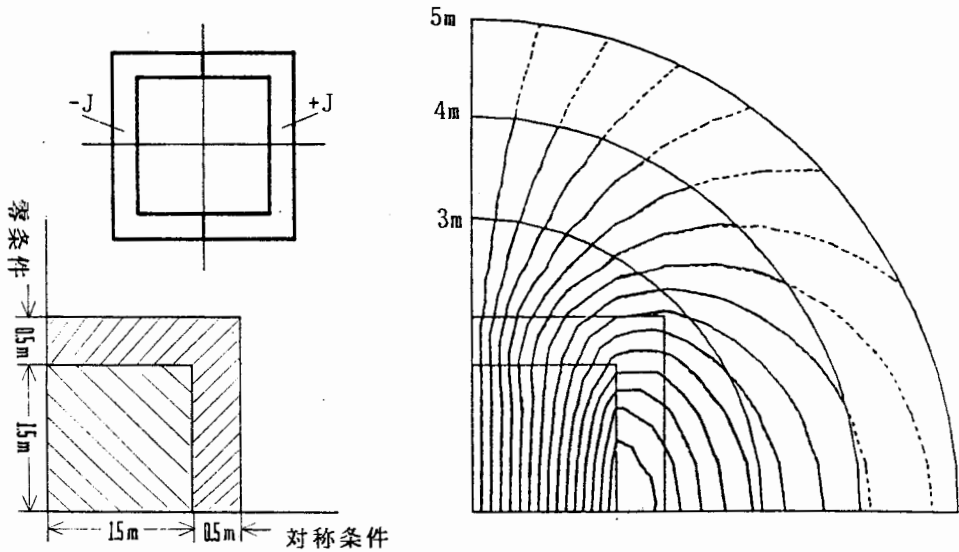
第 5 図に, 数値実験 (a) の場合の出発値による解の収束性を示す。尚, 誤差率 e は次式で与えられる。

$$e = \frac{X^{(n)} - X^{(n+1)}}{X^{(n+1)}} \times 100 \quad [\%]. \quad (32)$$

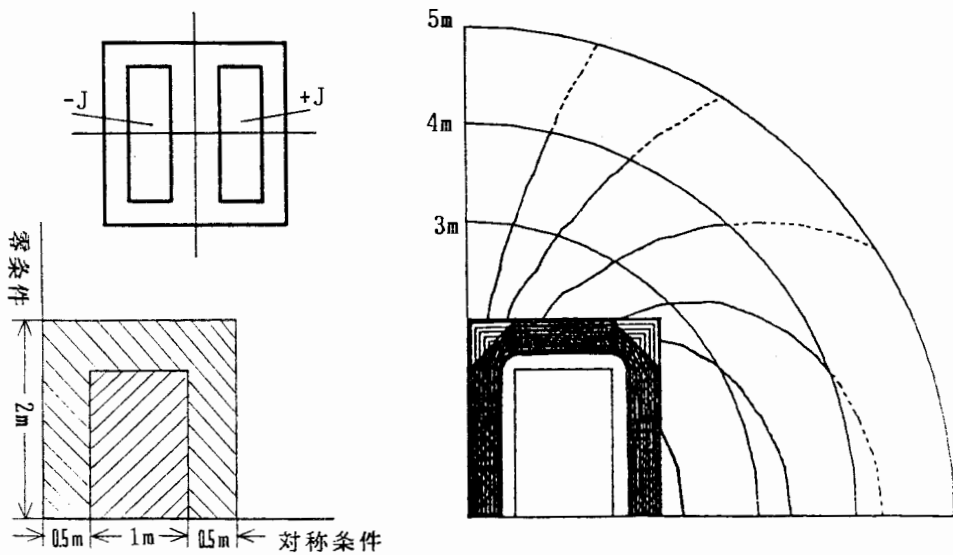
第 5 図において, 出発値を零ベクトルとした場合は, 仮想境界の半径の大きさを変えても収束性は変わらない。そして, 3.4 節で述べた出発値を用いた場合は, 零ベクトルを出発値とした場合よりも収束性が良く, 仮想境界の半径が大きくなるほど収束性が良い。このことからわかるように, 本論文で提案した出発値の決定法がかなり良い収束性を与えることがわかる。

節点数 3m-72点 数值解析法：有限要素法（三角形一次要素）
 4m-120点
 5m-181点

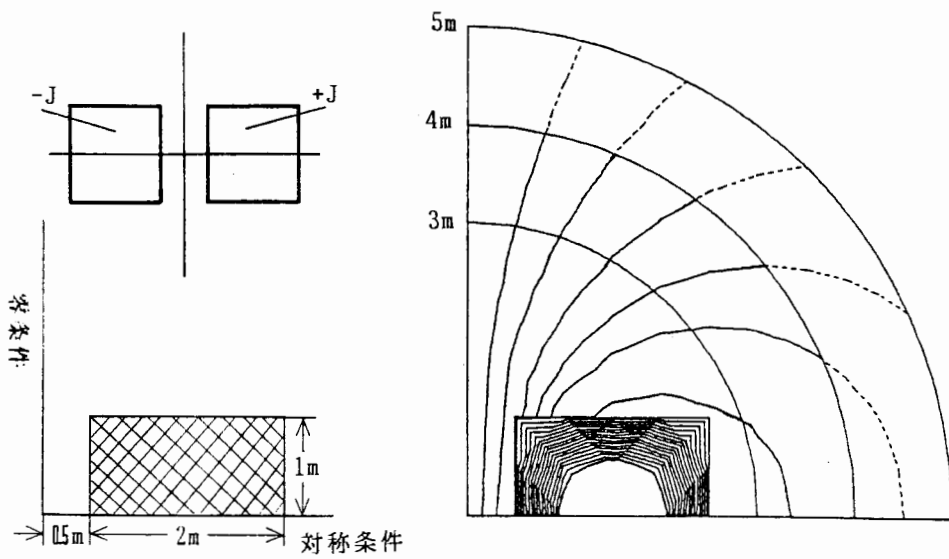
 : 導体, 電流密度 $J = 100 \text{ [A/m}^2\text{]}$.  : 磁性体, $\mu = 100 \mu_0$.



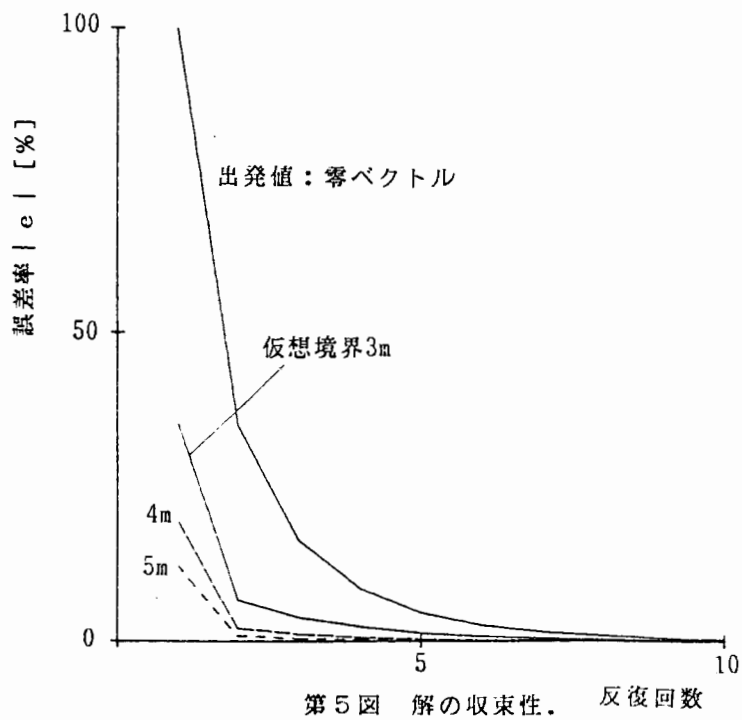
第4図 (a) (a) の場合の導体と磁性体および計算結果.



第4図 (b) (b) の場合の導体と磁性体および計算結果.



第4図 (c) (c) の場合の磁性体および計算結果。



第5図 解の収束性. 反復回数

5. 結言

本論文では、等価磁化電流密度ベクトルを考えることで、双対映像法が磁性体を含む系に適用できることを示した。その結果、反復解法となるが、出発値の選び方によって解が極めて早く収束し、十分実用的な解法であることを示した。また、一般に磁性体は磁気飽和等の非線形性を呈するため、閉領域問題においても反復的解法を使わざるを得ない。本報告で提案した反復解法は、非線形性問題を前提とすれば好ましい解法とも考えられる。

参考文献

- [1] Y.Saito and et al, IEEE Trans, Magnetics, MAG-23, pp.3569-3571 (1987).
- [2] Y.Saito and et al, Journal of Applied Physics, to be appeared in April 1988.
- [3] 斎藤 他, 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-87-125.
- [4] 斎藤 他, 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-87-126.